



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

UM MÉTODO HÍBRIDO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO

Paulo Vinicius Costa Rodrigues

São Cristóvão

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

UM MÉTODO HÍBRIDO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA  
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Paulo Vinicius Costa Rodrigues

Dissertação apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil.

Orientadora: Dra. Rejane Martins Fernandes Canha  
Agência Financiadora: Capes

São Cristóvão

2020

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA QUALIFICAÇÃO

PAULO VINICIUS COSTA RODRIGUES

---

APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE EM DATA  
27/02/2020

BANCA EXAMINADORA:

Rejane Martins Fernandes Canha  
Orientadora

1º Examinador  
Higor Sérgio de Argôlo  
Universidade Federal de Sergipe

2º Examinador  
Jorge Carvalho Costa  
Universidade Federal de Sergipe

## RESUMO

Esse trabalho apresenta uma nova alternativa para a obtenção de Modelos de Bielas e Tirantes para estruturas de Concreto Armado através do Método de Otimização Topológica Híbrida, já proposto na literatura técnica, sendo aqui refinado para utilizar elementos finitos poligonais e acelerar a solução do problema da não linearidade material. Nesse método, o concreto é aproximado como meio contínuo, utilizando elementos finitos bidimensionais poligonais, e as barras de aço como elementos de treliça, utilizando elementos finitos unidimensionais com dois nós. Para uma representação mais próxima da realidade, implementou-se um modelo constitutivo ortotrópico para o concreto, considerando rigidezes distintas para a compressão e tração, sendo uma das vantagens do modelo. O método híbrido também limita a disposição final das barras de aço, gerando estruturas melhores do ponto de vista construtivo, enquanto permite uma maior liberdade para a forma e a angulação das bielas de concreto. Como desvantagem o método é mais complexo, aumentando o custo computacional, que porém foi substancialmente reduzido através da implementação de um procedimento. Os resultados obtidos para alguns domínios se aproximaram bastante dos resultados de outras metodologias, mas pequenas diferenças são notadas que podem ser relevantes para o resultado final. Outros domínios apresentaram resultados com maiores diferenças mudando de forma significativa o modelo de bielas e tirantes final, apresentando, assim, uma nova alternativa de dimensionamento.

Palavras chaves: concreto armado; otimização topológica; híbrida; ortotrópico; bielas e tirantes.

## ABSTRACT

This work introduces a new alternative for obtaining strut and tie models using the Hybrid Topology Optimization Method, already proposed in the technical literature, being refined here to use polygonal finite elements and to accelerate the solution of the material nonlinearity problem. In this method, concrete is approached as a continuum, using a polygonal bidimensional finite element, and steel bars as truss elements, using a unidimensional finite element with two nodes. For a closer representation of reality, an orthotropic constitutive model for concrete was implemented considering different compression and traction stiffness, being one of the advantages of the model. The hybrid method also limits the final arrangement of steel bars, generating better structures from the constructive point of view, while allowing greater freedom for the shape and angulation of the concrete struts. As a disadvantage the method is more complex, increasing the computational cost, which however has been substantially reduced through the implementation of an algorithm. The results obtained for some domains were very close to the results of other methodologies, but small differences are noted that may be relevant to the final result. Other domains showed results with greater differences, significantly changing the final strut and tie model, presenting a new structural design alternative.

Key words: reinforced concrete; topology optimization; hybrid; orthotropic; strut-and-tie.

## Sumário

1	Introdução e justificativas.....	9
2	Objetivos.....	13
2.1	Objetivo Geral.....	13
2.2	Objetivos específicos.....	13
3	Revisão bibliográfica.....	14
3.1	Concreto Armado.....	14
3.2	Regiões dos tipos B e D.....	14
3.3	Otimização Topológica para determinar Modelos de Bielas e Tirantes.....	16
3.4	O gerador de malhas PolyMesher.....	18
3.5	O programa de Otimização Topológica Discreta GRAND.....	20
3.6	PolyTop.....	22
4	Referencial Teórico.....	23
4.1	Método dos Elementos Finitos.....	23
4.1.1	Formulação para elementos com deformação unidimensional axial.....	23
4.1.1.1	Formulação Forte.....	23
4.1.1.2	Formulação Fraca e Equação Matricial resultante.....	25
4.1.2	Formulação para elementos finitos bidimensionais.....	30
4.1.2.1	Elemento triangular de deformação constante (CST).....	33
4.1.2.2	Elemento quadrilateral de quatro nós.....	34
4.1.2.3	Elemento poligonal convexo.....	38
4.1.3	Malhas de elementos finitos.....	42
4.2	Relações constitutivas.....	43
4.3	Otimização.....	47
4.3.1	Forma geral de um problema de otimização.....	47
4.3.2	Tipos de variáveis de projeto.....	48
4.3.3	Mínimo e máximo local e global.....	48
4.3.4	Multiplicadores de Lagrange.....	49
4.3.5	Dualidade Lagrangiana.....	50
4.3.6	Problemas Convexos.....	51
4.3.7	Aproximações convexas.....	52
4.3.7.1	Programação Sequencial Linear.....	52
4.3.7.2	Programação Sequencial Quadrática.....	53
4.3.7.3	Linearização Convexa.....	53
4.3.8	Condições de KKT.....	54
4.3.9	Problemas separáveis.....	55
4.3.10	Crítério de Otimalidade (Optimality Criteria).....	56
4.4	Otimização Estrutural.....	58
4.4.1	Tipos de otimização estrutural.....	59
4.4.2	Otimização dimensional.....	59
4.4.3	Otimização Topológica.....	61
4.4.3.1	Método de Otimização Topológica Discreta.....	61
4.4.3.1.1	Formulação elástica para o Método Otimização Topológica Discreta.....	62
4.4.3.1.2	Formulação plástica para o Método da Otimização Topológica Discreta.....	63

4.4.4 Método de Otimização Topológica Contínua.....	64
4.4.4.1 Penalização de valores intermediários.....	64
4.4.4.2 Problemas de mal condicionamento.....	65
4.4.4.3 Filtros.....	66
4.5 Método de Otimização Topológica Híbrida.....	68
5 Metodologia.....	72
5.1 Procedimentos.....	72
5.1.1 Malha Híbrida.....	73
5.1.2 Problemas observados na geração de malha.....	74
5.1.3 Resolução do sistema de equilíbrio não-linear.....	74
5.1.4 Atualização das variáveis.....	76
5.2 Acelerador do processo do Método de Elementos Finitos não linear.....	77
6 Resultados e Discussão.....	79
6.1 Domínio Viga Biapoiada.....	79
6.1.1 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo GRANDpy.....	80
6.1.2 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo PolyTopy.....	81
6.1.3 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013).....	81
6.1.4 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo HybridTopy.....	82
6.1.4.1 Resultado do Domínio Viga Biapoiada pelo HybridTopy utilizando malhas poligonais.....	82
6.1.4.2 Resultado do Domínio Viga Biapoiada pelo HybridTopy utilizando malha de base regular.....	83
6.1.5 Comparação dos resultados obtidos na Viga Biapoiada.....	84
6.2 Domínio em forma de L.....	85
6.2.1 Resultado do Domínio em forma de L fornecido pelo GRANDpy.....	85
6.2.2 Resultado do fornecido pelo PolyTopy.....	86
6.2.3 Resultado do fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013).....	87
6.2.4 Resultado do fornecido pelo HybridTopy.....	88
6.2.5 Comparação de resultados do Domínio em Forma de L.....	89
6.3 Domínio Viga de Ponte.....	91
6.3.1 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo GRANDpy.....	91
6.3.2 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo PolyTopy.....	92
6.3.3 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013).....	93
6.3.4 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo HybridTopy.....	94
6.3.5 Comparação de resultados do Domínio Viga de Ponte.....	95
6.4 Domínio Viga Parede com Orifício.....	95
6.4.1 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo GRANDpy.....	96
6.4.2 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo PolyTopy.....	97
6.4.3 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo HybridTopy.....	98
6.4.4 Comparação de resultados do domínio Viga Parede com Orifício.....	99
6.5 Domínio Viga com Orifício.....	100
6.5.1 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo GRANDpy.....	100
6.5.2 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo PolyTopy.....	101
6.5.3 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo HybridTopy.....	101

6.5.4	Comparação de resultados do domínio Viga com Orifício.....	102
6.6	Domínio de Michell.....	103
6.6.1	Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo GRANDpy.....	103
6.6.2	Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo PolyTop.....	104
6.6.3	Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo HybridToppy.....	105
6.6.4	Comparação de resultados do Domínio de Michell.....	106
6.7	Domínio Parede Cisalhada com Orifícios.....	106
6.7.1	Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo GRAND .....	107
6.7.2	Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo PolyTop .....	108
6.7.3	Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pela Federação Internacional de Béton, (2008).....	109
6.7.4	Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo HybridToppy.....	110
6.7.5	Comparação dos Resultados do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios..	111
6.8	Dificuldades Encontradas.....	112
7	Conclusão.....	114
8	Sugestões para pesquisas futuras.....	116
9	Referências.....	117



## 1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS

O concreto armado é um material bastante utilizado na engenharia civil, devido principalmente à sua excelente resistência e versatilidade na obtenção de estruturas com diferentes formas, além de suas técnicas de construção serem bem conhecidas. Nele, o concreto e aço trabalham solidariamente, ou seja, há aderência perfeita entre os dois materiais propiciando a transferência de forças entre eles. Apesar de ser um material bastante utilizado, o seu comportamento, de certa forma, é complexo, de modo que várias pesquisas ainda são realizadas com o objetivo de se obterem modelos cada vez melhores que o descrevam.

Em geral, estruturas de concreto armado são divididas em dois tipos de regiões, tipo B – onde as hipóteses de Bernoulli – e tipo D – regiões de descontinuidade onde as hipóteses de Bernoulli não são válidas. Enquanto os Modelos de Bielas e Tirantes (MBT) tradicionais conseguem descrever mais facilmente as regiões do tipo B, não conseguem descrever as regiões do tipo D com precisão adequada. Nesses tipos de regiões, há a necessidade de procedimentos rebuscados para se obterem modelos que as descrevam e dimensionem. Schlaich; Schäfer; Jennewein (1987) elaboraram uma metodologia para a determinação de Modelos de Bielas e Tirantes com eficácia suficiente. Diversos modelos válidos com posições distintas de armadura podem ser obtidos; porém, é clara a importância de uma configuração geométrica aço-concreto que forneça a maior resistência possível com um menor uso de material. Sendo assim, a otimização da disposição do reforço de aço no concreto é almejada.

Otimizar é obter a solução de melhor eficácia fornecendo critérios e restrições apropriadas. A otimização existe nas mais variadas áreas na medida em que é algo bastante desejado. Na engenharia estrutural, a otimização, conhecida como otimização estrutural, se divide basicamente em três: de dimensão, de forma e de topologia.

Para que seja possível realizar qualquer um destes tipos de otimização, deve-se inicialmente estabelecer como será modelada a distribuição dos esforços na estrutura. Normalmente é utilizado o Método de Elementos Finitos; pois, além de fornecer resultados bastante satisfatórios possui uma compatibilidade adequada com os métodos de otimização existentes.

Vários estudos sobre o uso da otimização para a obtenção de Modelos de Bielas e Tirantes foram realizados. Ainda em 1977, Kumar (1977) aplicou os conceitos de otimização existente na época para a obtenção desses modelos. Posteriormente, vários outros estudos foram realizados nessa área – Liang, Xie, Steven (2000); Bruggi, (2009); Lee, Yang, Starossek (2012); Amir, Sigmund (2013); Gaynor, Guest, Moen (2013) ; Zhong Et Al. (2017) – demonstrando a sua importância na engenharia estrutural com um destaque significativo da otimização topológica.

Na otimização topológica, existem diversos algoritmos destinados a obtenção das chamadas zonas e direções de tração e compressão de determinada geometria. Esse conjunto de campos de tensões de tração e de compressão, denominada de topologia, se assemelha a uma treliça, a qual é associada a um Modelo de Bielas e Tirantes de uma estrutura de concreto armado. Quanto as estruturas de concreto armado, existem basicamente dois métodos para a obtenção desses modelos topológicos. Um deles discretiza o domínio a ser otimizado por uma densa malha de barras interconectadas por nós rotulados, como uma estrutura treliçada, que na nomenclatura internacional é conhecida como *Ground Structure*, e neste trabalho será denominado de Método de Otimização Topológica Discreta. O outro método utiliza elementos bidimensionais ou tridimensionais para a discretização do domínio a ser otimizado, admitindo-se somente o caráter binário, de presença ou não de material, e nesse trabalho será denominado de Método de Otimização Topológica Contínua.

A vantagem do Método de Otimização Topológica Contínua é a natureza mais livre da estrutura contínua, que permite que o caminho das forças assuma qualquer forma e que os membros se conectem em qualquer ângulo. A desvantagem dessa metodologia é que essa maior liberdade gera estrutura ótimas pouco práticas de se construir no mundo real.

Por sua vez, o Método de Otimização Topológica Discreta apresenta uma natureza menos livre da estrutura. A desvantagem é que o carregamento seguirá caminhos retos de acordo com uma malha pré-definida, ocasionando também uma dependência da malha adotada quanto ao resultado. No entanto, a vantagem é a possibilidade de se obterem estruturas ótimas com melhores condições para aplicação no mundo real.

Neste trabalho, apresentou-se um método híbrido, sugerido por Gaynor; Guest; Moen (2013), que visa unir as vantagens de cada uma eliminando as desvantagens. Nesse método, enquanto as barras de aço são aproximadas por barras de treliça, responsáveis somente pela resistência a tração, o concreto é aproximado por elementos finitos contínuos bidimensionais, resistindo às tensões de compressão. As relações constitutivas utilizadas para o concreto são do modelo ortotrópico apresentado por Darwin; Pecknold (1977). O método apresenta como vantagens: a obtenção de uma topologia mais realista para as estruturas de concreto armado do que as metodologias isoladas (MOT-C e MOT-D), pois o método considera a interação dos dois materiais existentes no concreto armado – concreto e aço – e adota um modelo constitutivo ortotrópico para o concreto representando melhor o seu comportamento real; fornece uma maior liberdade e melhor visualização do fluxo dos campos das tensões de compressão que representam as bielas comprimidas de concreto; e apresenta uma melhor praticidade referente à disposição do aço. Como desvantagem se tem o aumento do custo computacional em relação às formulações contínua e discreta isoladas, que, entretanto, considerando os processadores computacionais atuais não se torna um fator limitante à sua utilização. Ainda assim, neste trabalho, foi elaborado um procedimento de cálculo que reduziu consideravelmente esse tempo computacional.

Quanto ao Método dos Elementos Finitos, as barras de treliça foram aproximadas por elementos lineares unidimensionais de dois nós, enquanto que – diferentemente de Gaynor, Guest, Moen (2013), que usou elementos quadriláteros de quatro nós – os elementos bidimensionais foram aproximados por elementos poligonais convexos, que apresentam diversas vantagens citadas posteriormente.

Utilizou-se como ponto de partida três algoritmos MATLAB já existentes alterando-os para implementar a metodologia sugerida. São eles:

- PolyMesher (Talischi et al., 2012a): algoritmo para a geração de malhas de elementos bidimensionais poligonais convexos utilizando conceitos de diagramas de Voronoi centroidais;
- PolyTop (Talischi et al., 2012b): algoritmo que, a partir de um domínio fornecido, calcula a estrutura topológica ótima utilizando elementos bidimensionais poligonais, considerando uma restrição fixa de volume e alguma formulação para a penalização da densidade dos elementos;

- GRAND (Zegard; Paulino, 2014): algoritmo que, a partir de um domínio fornecido, gera uma malha de treliça (Ground Structure) cujo volume será otimizado pela formulação plástica.

Optou-se por implementar os algoritmos na linguagem Python – utilizando as bibliotecas Numpy (OLIPHANT, 2006), SciPy (VIRTANEN et al., 2020), Numba (LAM; PITROU; SEIBERT, 2015) e Matplotlib (HUNTER, 2007) – para facilitar o acesso deles a outras pessoas, pois Python é uma linguagem de programação aberta. Esses algoritmos herdaram o nome da versão em MATLAB acrescentando ao final o sufixo py para diferenciar. Além disso, foi desenvolvido um novo algoritmo, baseado nos algoritmos citados e implementando a metodologia de Gaynor; Guest; Moen [1], denominado de HybridToppy, que resolve problemas de otimização de estruturas planas de concreto armado utilizando elementos finitos poligonais convexos e a metodologia híbrida, os quais serão apresentados a seguir.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo Geral**

Apresentar uma nova alternativa para o projeto e análise de estruturas de Concreto Armado através do Método de Otimização Topológica Híbrida, já proposto na literatura técnica, sendo aqui refinado para utilizar elementos finitos poligonais e acelerar a solução do problema da não linearidade material.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Obter topologias híbridas de grande eficiência que podem ser utilizadas na geração de Modelos de Bielas e Tirante para estruturas de concreto armado permitindo a padronização do dimensionamento de estruturas que contém regiões do tipo D e, portanto, facilitando-o.
- Inserir no algoritmo uma rotina para acelerar a resolução da não linearidade material;
- Comparar os modelos obtidos por esse Método de Otimização Topológica Híbrida com os resultados dos modelos das metodologias discreta e contínua isoladas;
- Ampliar os conhecimentos referentes ao Método de Otimização Topológica, o Método dos Elementos Finitos, e o Modelo de Bielas e Tirantes;
- Contribuir com a modernização dos Modelos de Bielas e Tirantes.

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 Concreto Armado

O concreto, composto por água, cimento e agregados, sozinho não é apropriado para a utilização estrutural; pois apesar de possuir uma boa resistência a compressão, pouco resiste à tração, sendo esta resistência cerca de 10 vezes menor que aquela resistência à compressão. Desta forma, existe a necessidade de associar o concreto com outro material que possua boa resistência à tração para seu uso estrutural, surgindo assim o concreto armado, que é formado pela associação do concreto com a armadura de aço passiva. Estes dois materiais trabalham solidariamente, devido a forças de aderências entre eles, suportando os esforços. Nesse processo, há a possibilidade de fissuras.(CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

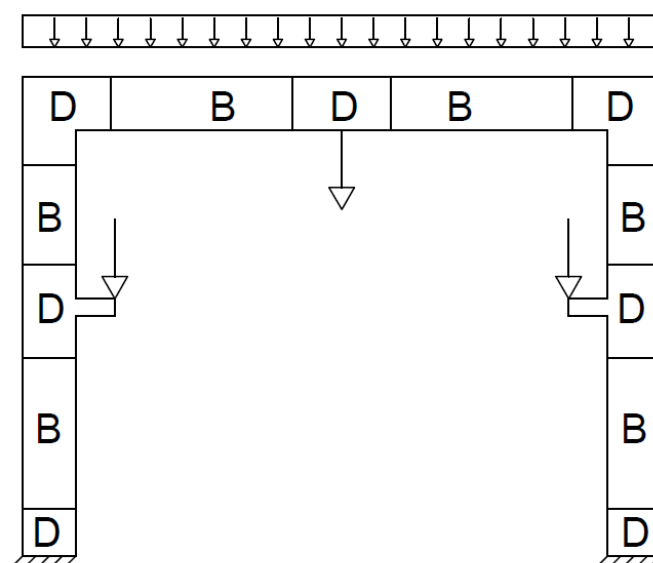
Sendo assim, esse material possui um comportamento bastante complexo de ser descrito desafiando pesquisadores, ao longo dos anos, que tentaram criar modelos que descrevessem adequadamente esse material.(GAYNOR; GUEST; MOEN, 2013).

Wilhem Ritter e Emil Mörsch no final do século XIX desenvolveram aproximações para descrever o comportamento do concreto armado. A ideia era que uma viga desse material fissurada se comportava como uma treliça, esse modelo ficou conhecido como modelo da analogia treliça de Mörsch, ou Modelo de Bielas e Tirantes. Esse método foi refinado por outros estudiosos criando-se a base científica do dimensionamento de estruturas de concreto armado.

#### 3.2 Regiões dos tipos B e D

Schlaich; Schäfer; Jennewein (1987) descreveram como Modelos de Bielas e Tirantes podem ser desenvolvidos seguindo o caminho das forças através da estrutura. Eles dividiram as estruturas de concreto armado em dois tipos de regiões, dos tipos B e D. Enquanto regiões em que as hipóteses de Bernoulli se aplicam são do tipo B, regiões do tipo D encontram-se em zonas de descontinuidade onde a teoria de Bernoulli não prevê boas aproximações. A Figura 1 demonstra exemplos de regiões dos tipos B e D em um pórtico.

Figura 1 – Regiões do Tipo B e D em um pórtico



Fonte: Adaptado de Schlaich; Schäfer; Jennewein (1987)

As regiões do tipo B são facilmente descritas pelos modelos tradicionais de bielas e tirantes, porém esses modelos tradicionais não descrevem as regiões do tipo D com precisão adequada. Essas regiões por muito tempo foram dimensionadas com auxílio do empirismo; que, apesar de sua devida importância e eficiência, deve ser acompanhado, quando possível, por modelos teóricos adequados. Esses modelos devem almejar simplicidade e suficiência dos resultados, facilitando sua aplicação e garantindo a segurança adequada da estrutura.

Schlaich; Schäfer; Jennewein (1987) desenvolveram uma metodologia para a determinação de Modelos de Bielas e Tirantes que se aplica para os dois tipos de regiões. É sugerido o seguinte procedimento:

- Desenvolver a geometria do modelo orientando as bielas e os tirantes de acordo com a direção das tensões atuantes no material, detalhando onde será aplicado o reforço do concreto.
- Calcular a força atuante nos membros, respeitando o equilíbrio
- Dimensionar os membros suficientemente

Adotando o teorema do limite inferior da plasticidade, pode-se considerar que a estrutura resultante será um limite inferior da resistência última da estrutura. Apesar de parecer simples esse procedimento, para geometrias mais complexas,

encontrar a melhor geometria que fornece a maior rigidez com a segurança adequada é difícil, pois se necessita de várias tentativas e ajustes.

Nesse contexto, a otimização topológica começou a ser utilizada para determinar Modelos de Bielas e Tirantes que apresentam uma maior rigidez e, com o teorema inferior da plasticidade, garantem a segurança devida.

### **3.3 Otimização Topológica para determinar Modelos de Bielas e Tirantes**

O uso da otimização como recurso para se obter um Modelo de Bielas e Tirantes é antigo. Kumar (1977) estudou vigas curtas de concreto armado sujeitas a aberturas. No seu estudo, a viga curta foi aproximada por uma “treliça básica” que foi otimizada, utilizando os conceitos e procedimentos de otimização existentes na época, fornecendo, como resultado, o Modelo de Bielas e Tirantes da estrutura. Além disso, concluiu-se que, se as aberturas não se encontrarem na direção do caminho das forças, não influenciam no resultado final do modelo obtido. Caso se encontrem, o Modelo de Bielas e Tirantes altera de modo a respeitar o novo caminho das forças.

Liang; Xie; Steven (2000) apresentaram um método de otimização topológica baseado em performance evolucionária utilizando restrições de deslocamento. No trabalho deles, é ressaltado que o comportamento de estruturas dominadas pelo efeito do cortante, cujo domínio é majoritariamente composto por regiões do tipo D, é mais complexo – como citado anteriormente. Sendo assim, recomenda-se o uso de Modelos de Bielas e Tirantes, incluindo a ASCE-ASCI Committe 445 de cortante e torção como um dos recomendantes. O método apresentado pelo trabalho demonstrou ser útil para a determinação de Modelos de Bielas e Tirantes adequados e, por consequência, para o dimensionamento de estruturas de concreto armado.

Depois, Bruggi (2009) ilustrou a implementação da otimização topológica, utilizando códigos comerciais de elementos finitos e adotando o critério do trabalho das forças externas mínimo (minimum compliance), restrição de volume e o SIMP (Solide Isotropic Microstruture of Penalization for Intermediate Density), para a obtenção de Modelos de Bielas e Tirantes em estruturas Bidimensionais e Tridimensionais. Em estruturas tridimensionais, permitiu, especialmente, a análise do reforço para torção. No trabalho, ressaltou-se a necessidade da implementação de



alguns métodos para contornar problemas que surgem devido a discretização da malha, como problema do tabuleiro de xadrez. O procedimento proposto permitiu a obtenção de Modelos de Bielas e Tirantes independentes de malha que serviam de geometria inicial para o dimensionamento da estrutura. Ainda assim, observou-se a necessidade de reforço adicional para fornecer a ductilidade e, portanto, permitir o uso da teoria do limite inferior da plasticidade.

Lee; Yang; Starossek (2012) analisou, conceitualmente, efetivas e ótimas distribuições de materiais, referente ao reforço de aço no concreto, na construção de pórticos. O trabalho focou na ligação entre viga e coluna, que é uma região do tipo D, aumentando a performance tanto quanto a carregamento estático quanto a dinâmico. Enquanto que para problema estático o critério adotado foi o do mínimo trabalho das forças externas, o problema dinâmico maximizou o quadrado da frequência própria de primeira ordem. Ambos utilizaram o SIMP. No trabalho, foram encontrados arranjos de reforço ótimos tanto para cargas estáticas quanto para dinâmicas, não ocorrendo necessariamente uma correspondência entre as duas. Indicou-se que o reforço seja disposto de forma a atender as duas distribuições obtidas, permitindo que a estrutura se comporte da melhor forma possível para os dois tipos de carregamento.

Amir; Sigmund (2013) apresentou um novo procedimento para a determinação de distribuições ótimas de reforço na estrutura. No trabalho o concreto é representado como um modelo de gradiente aprimorado do dano contínuo com “relaxamento de tensão” e o reforço é modelado por barras elásticas que são inseridas no domínio do concreto, utilizando uma Ground Structure. Portanto as barras de aço e o concreto são modelados diferentemente, pois se comportam diferentemente no concreto armado.

Seguindo essa linha, Gaynor; Guest; Moen (2013) também modelaram o concreto e o reforço considerando esse comportamento distinto. No trabalho, foi apresentado o método denominado por eles de híbrido. O concreto é aproximado por elementos finitos de meio contínuo, que podem ser bidimensionais ou tridimensionais, ortotrópicos. As relações constitutivas utilizadas para o concreto são do modelo ortotrópico apresentado por Darwin; Pecknold (1977). O reforço é aproximado da mesma forma que Amir; Sigmund (2013). Como critério de otimização foi utilizado o trabalho das forças externas mínimo, e o material do

contínuo foi aproximado utilizando o SIMP. O método apresentado propõe aliar as vantagens da otimização utilizando uma Ground Structure com as da otimização topológica contínua. Demonstrou-se que é possível a união dessas duas abordagens sendo possível até mesmo a captura de efeitos que as metodologias contínuas e discretas isoladamente não capturam. A metodologia adotada por Gaynor; Guest; Moen (2013) será apresentada de forma mais detalhada posteriormente, pois será uma das bases para o trabalho aqui desenvolvido.

Já que diversos Modelos de Bielas e Tirantes foram criados com uso de técnicas distintas, Zhong et al. (2017) estabeleceram um processo de avaliação para ser aplicado com o intuito de analisar a eficiência dos diversos modelos existentes em garantir com segurança suficiente o desempenho adequado da estrutura. O processo é dividido em 3 partes: Análise Primária – o Modelo de Bielas e tirantes deve corresponder com o resultado da análise linear de tensão –; Análise Posterior – avalia-se a correspondência do reforço com a região de fissuras no concreto, obtidas com o uso de simulação –; Análise Final – avalia-se, através de uma análise numérica, o comportamento final da estrutura. O trabalho demonstrou que tal análise é importante na medida em que permite observar possíveis deficiências que podem ser apresentadas em diversos modelos, já previstas por Bruggi.

Haverá uma apresentação mais analítica de alguns trabalhos, referentes aos algoritmos utilizados, a seguir, pois há um intenso uso dos mesmos neste trabalho.

### **3.4 O gerador de malhas PolyMesher**

Uma parte bastante importante no Método dos Elementos Finitos é a elaboração das malhas. Como foi adaptado o PolyMesher para a geração de uma malha híbrida, convém apresentar uma breve explicação do algoritmo proposto por Talischi et al., (2012a).

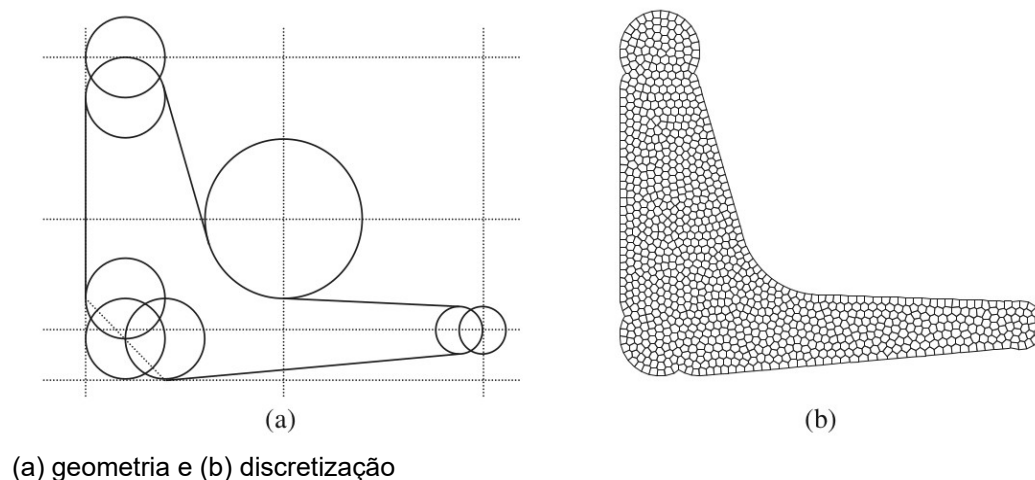
Talischi et al., (2012a) descrevem o PolyMesher como um código do Matlab robusto para a geração de malhas com elementos poligonais que depende de uma descrição implícita da geometria do domínio.

O algoritmo utiliza a descrição do domínio, através de funções de distância, e o conceito de diagramas de Voronoi centroidais para elaborar a discretização.

A função de distância tem como entrada um ponto no  $R^2$  e imagem a distância desse ponto até o contorno do domínio, sendo negativa se pertencente ao domínio e positiva se externa ao domínio.

Diagramas de Voronoi são diagramas que a partir de pontos no  $R^2$ , denominados de “sementes”, dividem esse plano em “células”. Essas células apresentam a característica de que os pontos presentes nelas estão mais próximo da sua semente do que das demais sementes. Um aspecto bastante importante é que diagramas de Voronoi são formados por polígonos convexos, que são mais interessantes em aplicações como elementos finitos. Ainda assim, um diagrama de Voronoi proveniente apenas de sementes aleatórias pode fornecer uma malha não indicada para o uso em elementos finitos. Desta forma, é preferível utilizar um diagrama de Voronoi centroidal, que é um diagrama de Voronoi cujas sementes coincidem com o centróide das células, gerando malhas mais uniformes. Com o uso do procedimento de Lloyd, citado no trabalho deles, é possível, a partir de um conjunto de sementes aleatórias, convergir para uma malha mais uniforme e, consequentemente, para esse diagrama de Voronoi centroidal.

Fornecida a geometria do problema, o algoritmo PolyMesher permite sementes iniciais serem inseridas ou, se não, as escolhe aleatoriamente. As sementes mais próximas do contorno são refletidas, aplicando algumas correções necessárias. A partir dessas sementes (incluindo as refletidas), é feito o diagrama de Voronoi, corrigindo, posteriormente, eventuais falhas. Com o diagrama corrigido e excluídas as sementes externas ao domínio, é aplicado o algoritmo de Lloyd para aperfeiçoar as sementes se obtendo um diagrama de Voronoi mais uniforme. O processo é repetido até que o critério de parada seja atingido, tolerância ou número de interações. A Figura 2 demonstra como até mesmo geometrias complexas fornecem bons resultados de discretização. O algoritmo oferece uma abordagem simples e efetiva na elaboração de discretização de geometrias bidimensionais criando malhas de polígonos convexos.



Fonte: Talischi et al., (2012a)  
 Figura 2 – Triângulo suspenso

### 3.5 O programa de Otimização Topológica Discreta GRAND

A malha fornecida pelo PolyMesher é ideal para o uso em elementos finitos bidimensionais poligonais e, embora não se aplique diretamente a elementos unidimensionais, serve de base para a geração da malha de treliças para o Método de Otimização Topológica Discreta.

Como o algoritmo GRAND foi utilizado para elaborar o GRANDpy que por sua vez é utilizado na geração da malha discreta, presente na formulação híbrida deste trabalho, convém apresentá-lo aqui e descrever os seus aspectos, principalmente no que se refere à geração da malha treliçada.

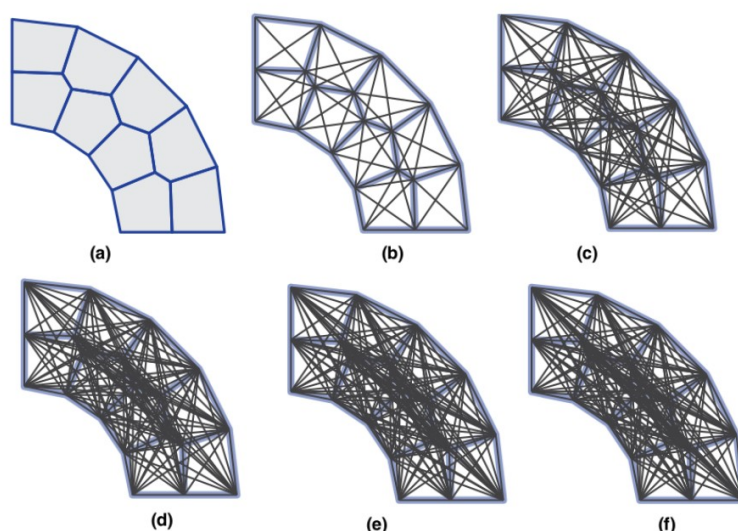
O GRAND (*GRound structure ANalysis and Design*) é um algoritmo de Método de Otimização Topológica Discreta que, a partir de uma malha de base, do tipo fornecida pelo PolyMesher, cria uma malha treliçada a qual será otimizada pelo método plástico. Zegard; Paulino, (2014) explicam em seu trabalho o funcionamento do algoritmo.

O GRAND transforma o problema inicial em uma abordagem algébrica e utiliza conceitos de zonas de restrições, que são baseados em algoritmos de colisões aplicado em geometria computacional e videogames, para criar a estrutura treliçada. É verificada a colinearidade de membros com o intuito de eliminar

membros colineares, aplicando uma tolerância na variação angular para considerar um membro colinear a outro.

A estrutura de base possui níveis de conectividade escolhidos pelo usuário do programa. Os níveis de conectividade se relacionam com a conectividade dos nós da estrutura com sua vizinhança. O nível 1 de conectividade gera barras entre os nós de cada elemento de base, o nível 2, além das barras geradas do nível 1, acrescenta barras entre os nós do elemento de base considerado e os nós do seu elemento de base vizinho, o nível 3, além das barras geradas nos níveis 1 e 2, adiciona barras entre os nós do elemento de base considerado e os nós do elemento de base vizinho do seu vizinho, e assim por diante. A Figura 3 demonstra os níveis de conectividade.

Figura 3 – Níveis de conectividade



(a) malha base, (b) nível 1, (c) nível 2, (d) nível 3, (e) nível 4, (f) nível 5  
Fonte: Adaptado de Zegard; Paulino (2014)

O algoritmo GRAND permite a otimização de estruturas treliçadas com domínios bidimensionais complexos de forma simples e eficiente. A formulação plástica utilizada no algoritmo fornece uma otimização rápida e eficiente para estruturas discretas; mas, por ser, a priori, incompatível com a formulação híbrida, somente foi utilizada a etapa de geração da malha treliçada do GRAND neste trabalho.

### 3.6 PolyTop

Já que o programa PolyTop foi usado como ponto de partida para a implementação da formulação híbrida deste trabalho, é importante apresentar a sua formulação e os seus principais conceitos.

O PolyTop, desenvolvido por Talischi et al. (2012b), é um código de MATLAB para a Otimização Topológica Contínua de estruturas bidimensionais, que inclui uma rotina generalizada de elementos finitos baseada em elementos poligonais isoparamétricos. Uma vantagem desse algoritmo é que este apresenta uma separação dos processos envolvidos na otimização. Por exemplo, a rotina do cálculo dos deslocamentos por elementos finitos se encontra separada da rotina de cálculo referente a atualização da variável de projeto pelo método do critério de otimalidade. Talischi et al., (2012b) explicam, no trabalho deles, os procedimentos do algoritmo e teoria necessária para entendê-lo.

O programa minimiza o trabalho das forças externas (*Compliance*) submetido a restrição de volume, que é uma fração do volume total do domínio. A malha utilizada pode ser fornecida ou será utilizado o PolyMesher para obtê-la. Outros dados de entradas são fornecidos, tais como os limites de densidade superior e densidade inferior, raio do filtro, limites de iteração e etc. O programa resolve o problema através de algum método de penalização escolhido, sendo SIMP um deles. A penalização é resolvida com vários expoentes de forma crescente, minimizando as instabilidades numéricas e interferências de mínimos locais. A formulação de elementos finitos utilizada será exposta na seção 4.1.2.3 e a rotina para o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento é executada somente uma vez, diminuindo assim o tempo de computação. Há a necessidade do uso de filtros para evitar problemas de instabilidade numérica e o programa apresenta uma rotina específica para este procedimento executada uma vez no início. A atualização da variável de projeto é dada pelo critério de otimalidade apresentado na seção 4.3.10. Enquanto o programa é executado, a topologia da estrutura no momento é apresentada, sendo atualizada com o decorrer da execução do programa.

A separação das rotinas do código e o artigo citado, permitem um ótimo entendimento do algoritmo e facilita a sua modificação para outros usos específicos, o que foi feito nesse trabalho.

## **4 REFERENCIAL TEÓRICO**

### **4.1 Método dos Elementos Finitos**

Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos para a análise estrutural dos modelos otimizados. Esse método numérico é amplamente usado na matemática e engenharia. Alguns exemplos da área de uso são: análise estrutural, transferência de calor, escoamento de fluidos. Esses tipos de problemas são geralmente descritos por equações diferenciais ordinárias ou parciais, que podem possuir soluções analíticas bastante dificultosas ou até impossíveis de se obter. Porém, essas soluções podem ser aproximadas, utilizando algum Método Variacional e o Método dos Elementos Finitos, resultando em um sistema de equações algébricas. O processo, que é chamado de discretização, consiste em subdividir o domínio em subdomínios ou unidades (elementos finitos) conectados por pontos ou contornos. Sendo assim, em vez de ser resolvido o problema para o domínio inteiro em uma operação, formula-se equações aproximadas para cada subdomínio e, combinando-as, obtém-se a solução aproximada para o domínio todo. (LOGAN, 2012)

O Método dos Elementos Finitos é um dos modelos mais utilizados na análise estrutural no processo de Otimização Topológica, pois fornece soluções bastante satisfatórias a depender de como o problema é formulado. Contudo este método pode gerar uma dependência da discretização (da malha utilizada). Por isso, recomenda-se que, no processo de Otimização Topológica, sejam feitos alguns testes de malhas para se verificar a sua influência, a depender da formulação utilizada (discreta ou contínua) e da estrutura a ser otimizada.

#### **4.1.1 Formulação para elementos com deformação unidimensional axial**

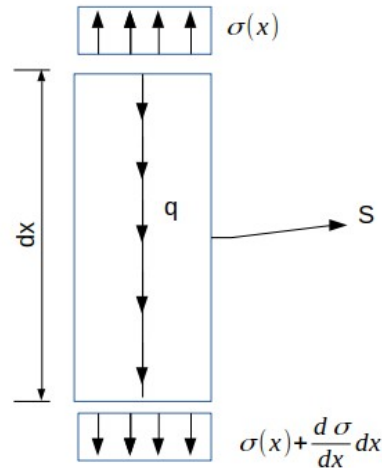
A armadura no concreto armado foi modelado como um elemento unidimensional axial. Portanto é de interesse desenvolver a formulação em elementos finitos para esse mesmo elemento.

##### **4.1.1.1 Formulação Forte**

O elemento unidimensional, utilizado principalmente em problemas de treliça, representará as barras de aço no concreto armado. A Figura 4 apresenta as

forças atuantes em uma parcela  $dx$  do elemento, a partir da qual obtém-se a equação diferencial governante.

Figura 4 – Elemento finito unidimensional



Fonte: Próprio autor

Pelo equilíbrio das forças, tem-se

$$-\sigma \cdot S + q \, dx + \left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx\right) \cdot \left(S + \frac{dS}{dx} dx\right) = 0 \quad (4.1.1)$$

em que  $\sigma$  é a tensão atuante,  $S$  é a área da seção transversal,  $q$  é o carregamento externo aplicado e  $dx$  é uma dimensão infinitesimal.

Desprezando o termo de ordem superior, a Equação 4.1.1 resulta em

$$\frac{d(\sigma S)}{dx} = -q \quad (4.1.2)$$

A Figura 5 a seguir demonstra o efeito de um deslocamento  $u$  em um elemento infinitesimal e permite o desenvolvimento da relação de compatibilidade.



Figura 5 – Compatibilidade



Fonte: Próprio autor

Observando a figura, nota-se que

$$dx + u + \frac{du}{dx} dx = u + dx + \Delta dx$$

Portanto, é possível determinar que

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (4.1.3)$$

em que  $\varepsilon$  é definido como a deformação.

Assumindo-se um comportamento elástico, ou seja,

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.1.4)$$

em que  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material, a Equação 4.1.2 resulta em

$$\frac{d}{dx} \left( ES \frac{du}{dx} \right) = -q \quad (4.1.5)$$

Essa Equação 4.1.5 é conhecida como formulação forte.

#### 4.1.1.2 Formulação Fraca e Equação Matricial resultante

Para o uso do Método dos Elementos Finitos, é interessante utilizar uma forma fraca da Equação 4.1.5. Para isso, aplica-se um método variacional, representando a formulação forte na forma de integral. A função do deslocamento é aproximada por uma combinação linear de funções aproximadoras, geralmente polinômios devido a sua fácil manipulação, que respeitam as condições de contorno

do elemento. Utilizando uma função ponderadora  $w$  a partir da Equação 4.1.5, pode ser obtida a seguinte equação:

$$\int_D \left( \frac{d}{dx} \left( E S \frac{du}{dx} \right) + q \right) w dx = 0 \quad (4.1.6)$$

Em que  $D$  é o domínio do elemento.

Admitindo que o domínio do elemento varie de 0 a  $L$ , sendo  $L$  o comprimento do mesmo, e decompondo a integral, utilizando integração por partes, resulta-se

$$-\int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} E S \right) dx + \left[ \frac{d}{dx} \left( E S \frac{du}{dx} \right) w \right]_0^L = \int_0^L -w q dx \quad (4.1.7)$$

Para o que se pretende nesse trabalho, o valor de  $q$ , que representa a força distribuída no elemento, será considerado nulo; pois considera-se que as cargas são introduzidas apenas nos nós.

Como apresentado anteriormente, a função deslocamento deve ser aproximada por combinações lineares de funções contínuas e diferenciáveis que respeitam as condições de contorno. Sendo assim,

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i \quad (4.1.8)$$

Uma aproximação linear da função  $u$  é adequada, resultando em

$$\tilde{u}(x) = u_1 N_1 + u_2 N_2$$

em que: (4.1.9)

$u_i$  é o deslocamento do nó  $i$ ;

$N_i$  é a Função de forma  $i$ .

Sendo,

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

A função ponderadora será dada de forma que  $w_i = N_i$ . Fazendo as devidas substituições na Equação 4.1.7 e resolvendo-a, é obtida a seguinte relação:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.11)$$

Que também pode ser representada por:

$$\mathbf{K}_e^l \mathbf{u}_e^l = \mathbf{F}_e^l$$

Em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^l &= \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de rigidez local do elemento;} \\ \mathbf{u}_e^l &= \begin{bmatrix} u_{e1}^l & u_{e2}^l \end{bmatrix}^t \text{ é o vetor deslocamento nodal local do elemento;} \\ \mathbf{F}_e^l &= \begin{bmatrix} F_{e1}^l & F_{e2}^l \end{bmatrix}^t \text{ é o vetor de forças nodais locais do elemento.} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Para se resolver uma estrutura cujo domínio é discretizado em vários elementos, deve-se construir uma matriz de rigidez global. Tal matriz engloba todas as equações e graus de liberdades referentes a cada elemento e é produzida através da expansão das diversas matrizes locais, colocando zeros nos graus de liberdade que não fazem parte do elemento.

Desta forma, há a seguinte relação:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.1.13)$$

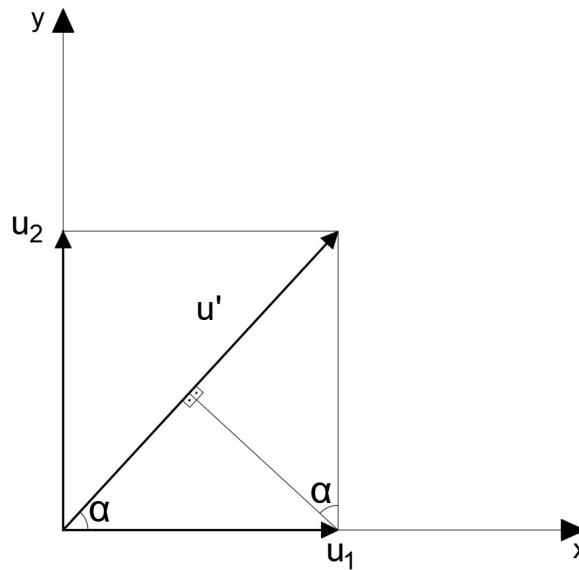
$\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global da estrutura

$\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento nodais da estrutura

$\mathbf{F}$  é o vetor forças nodais da estrutura

Como uma estrutura é formada por vários elementos em direções distintas, deve-se transformar o sistema de coordenada local unidimensional descrito pela Equação 4.1.12 para um sistema de coordenada global na dimensão da estrutura.

Figura 6 – Transformação de coordenadas



Fonte: Próprio autor

Pela Figura 6, observa-se que

$$u^l = u_1 \cos(\alpha) + u_2 \sin(\alpha)$$

Determinando os vetores de deslocamento local e global respectivamente por:

$$\mathbf{u}^l = \begin{bmatrix} u_1^l & u_2^l \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T$$

Em que:

- $u_1^l$  é o deslocamento do nó inicial na direção x local;
- $u_2^l$  é o deslocamento do nó final na direção x local;
- $u_1$  é o deslocamento do nó inicial na direção x global;
- $u_2$  é o deslocamento do nó inicial na direção y global;
- $u_3$  é o deslocamento do nó final na direção x global;
- $u_4$  é o deslocamento do nó final na direção y global.

Desta maneira, pode-se definir uma matriz transformação :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.1.14)$$

De tal forma que

$$\mathbf{u}^l = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad (4.1.15)$$

Utilizando a Figura 6 e conceitos de projeção pode-se chegar também a seguinte relação:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}^t \mathbf{u}^l \quad (4.1.16)$$

Processo análogo pode ser aplicado às forças nodais de tal modo que definindo os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^l &= \begin{bmatrix} F_1^l & F_2^l \end{bmatrix}^t \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{bmatrix}^t \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

as seguintes relações são obtidas:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^l &= \mathbf{T} \mathbf{F} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{T}^t \mathbf{F}^l \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Sendo assim, a partir da equação 4.1.12, é obtido o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^l \mathbf{u}_e^l &= \mathbf{F}_e^l \\ \mathbf{T}^t \mathbf{K}_e^l \mathbf{T} \mathbf{u}_e &= \mathbf{T}^t \mathbf{F}_e^l \\ \mathbf{T}^t \mathbf{K}_e^l \mathbf{T} \mathbf{u}_e &= \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Definindo a matriz de rigidez em coordenadas globais como

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T}^t \mathbf{K}_e^l \mathbf{T} \quad (4.1.20)$$

resulta em

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \quad (4.1.21)$$

Analogamente ao caso dos elementos na mesma direção, mas usando a equação 4.1.21 nos elementos, há uma relação do tipo:

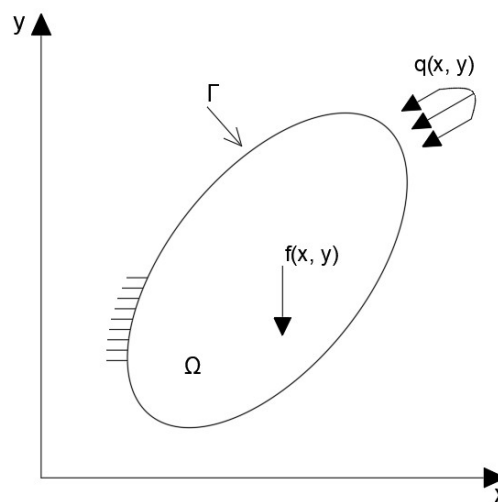
$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

A resolução desse sistema com o uso adequado das condições de contorno resulta na obtenção dos deslocamento e com isso a solução do problema.

#### 4.1.2 Formulação para elementos finitos bidimensionais

O concreto presente na estrutura foi aproximado como um domínio de elementos contínuos bidimensionais. Admitiu-se que o problema é plano, o carregamento pertence ao plano da estrutura e não há rigidez na direção ortogonal. A Figura 7 representa a estrutura do problema a ser estudado que consiste na análise de chapas.

Figura 7 – Sólido bidimensional



Nessa figura,  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $f$  e  $q$  são respectivamente o domínio bidimensional, o contorno desse domínio, as forças externas atuantes e as forças de corpo

Fonte: Próprio autor

A formulação para elementos finitos bidimensionais segue a mesma lógica adotada para elementos unidimensionais. A lei constitutiva do material para esse tipo de problema é exibida abaixo:

$$\sigma = D \varepsilon$$

Sendo:

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{para o Estado Plano de Tensão e elemento} \quad (4.1.22)$$

isotrópico

Definindo o deslocamento de um ponto como

$$u = [u \quad v]^T$$

em que  $u$  é o deslocamento horizontal do ponto e  $v$  é o deslocamento vertical do ponto, a relação entre deformação e deslocamento será dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^t \quad (4.1.23)$$

Outra maneira de representar essa relação é a seguinte:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.1.24)$$

As forças de corpo e as forças nodais serão definidas respectivamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [f_x \quad f_y]^T \\ \mathbf{q} &= [q_x \quad q_y]^T \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Apesar de ser possível se obter a forma forte do problema a partir das equações de equilíbrio e desta se encontrar a forma fraca que seria usada para a resolução através do Método dos Elementos Finitos, para o caso bidimensional, uma opção mais simples é utilizar o princípio dos trabalhos virtuais (PTV). O PTV afirma que o trabalho virtual interno deve ser igual ao trabalho virtual externo. Seja um corpo em equilíbrio submetido a um campo de deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{u}$ , que por sua vez provocam deformações virtuais  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , utilizando as operações matriciais adequadas, o PTV pode ser descrito pela seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{S_o} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS \quad (4.1.26)$$

Em que  $\delta$  é um símbolo indicando “virtual” e  $\Omega$  é o domínio analisado.

Assim como no caso unidimensional,  $u$  e  $v$  serão aproximados por funções. Sendo assim,

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i, \quad \tilde{v} = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i \quad (4.1.27)$$

Portanto, há a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{u} \quad (4.1.28)$$

Sabendo que

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \delta u_i \phi_i, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \delta v_i \phi_i \quad \forall \quad \delta u_i \text{ e } \delta v_i \quad (4.1.29)$$

pode-se chegar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}) d\Omega \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{S_{\sigma}} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q} dS = \dots \\ \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}\boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}) d\Omega_e \mathbf{u} &= \sum_{e=1}^n \left[ \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} d\Omega_e + \int_{S_{\sigma_e}} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q} dS_e \right] \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Definindo a matriz de rigidez do elemento como

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}\boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}) d\Omega_e \quad (4.1.31)$$

e definindo o vetor forças nodais equivalentes como

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} d\Omega_e + \int_{S_{\sigma_e}} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q} dS_e \quad (4.1.32)$$

resulta-se um sistema linear da forma:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \quad (4.1.33)$$

Analogamente ao explicitado no caso unidimensional, será possível também estabelecer o sistema linear da estrutura toda da forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.1.34)$$

Sendo assim, para se obter a matriz de rigidez de cada elemento (Equação 4.1.33) e por consequência a matriz de rigidez global (Equação 4.1.34), utiliza-se



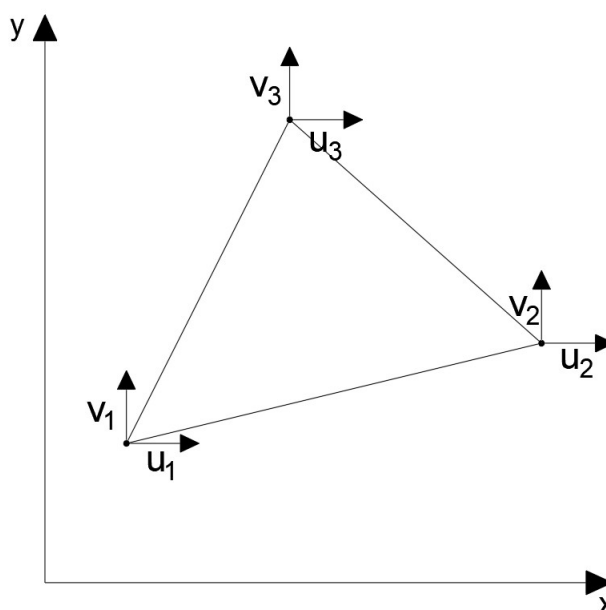
uma função aproximadora compatível com as condições de contorno e continuamente diferenciável até o grau necessário. Portanto, com as relações de 4.1.30 até 4.1.34, pode-se resolver o problema da estrutura bidimensional.

Os dois tópicos a seguir abordarão brevemente sobre os dois tipos mais comuns de elementos utilizados na análise bidimensional e o tópico 4.1.2.3 abordará uma metodologia proposta por Sukumar; Tabarraei (2004) para a resolução de elementos poligonais convexos com qualquer número de lados.

#### 4.1.2.1 Elemento triangular de deformação constante (CST)

O elemento triangular de deformação constante, *Constant Strain Triangle*, possui somente 3 nós, cada um com dois graus de liberdade, e é bastante utilizado devido a sua simplicidade. A Figura 8 demonstra um modelo desse tipo de elemento.

Figura 8 – Triângulo elementar



Fonte: Próprio autor

Analogamente ao caso unidimensional, os deslocamentos num ponto qualquer de um elemento serão aproximados a partir de combinações lineares dos valores nodais. Desta forma:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_e &= u_{e1}\phi_1 + u_{e2}\phi_2 + u_{e3}\phi_3 \\ \tilde{v}_e &= v_{e1}\phi_1 + v_{e2}\phi_2 + v_{e3}\phi_3\end{aligned}\tag{4.1.35}$$

As funções  $\phi_i$  são polinômios lineares completos em  $x$  e  $y$ , ou seja, da forma

$$\phi_i = a_i x + b_i y + c_i \quad (4.1.36)$$

Como no caso linear, a função de forma deve possuir valor unitário nas coordenadas do nó correspondente e zero nos demais nós. Sendo assim,

$$\phi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad (4.1.37)$$

Portanto, para se determinar os valores de  $a_i$  e  $b_i$ , resolve-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.38)$$

Resolvendo para cada  $\phi_i$ , a seguinte relação é obtida:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) & (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \quad (4.1.39)$$

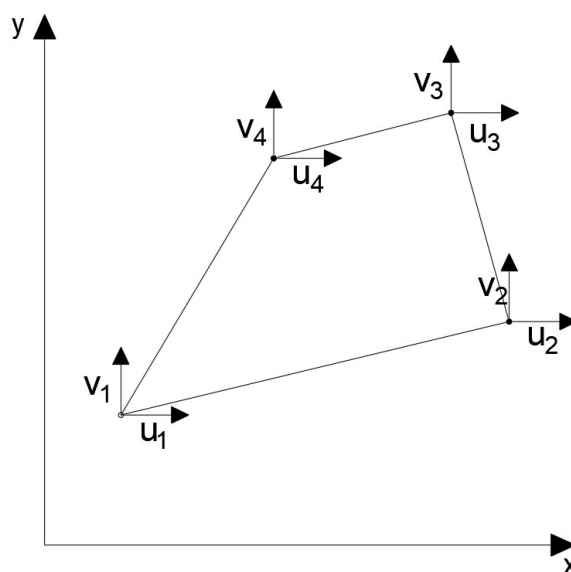
Em que  $A$  é o valor da área do elemento e fornecido pela seguinte relação:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.1.40)$$

#### 4.1.2.2 Elemento quadrilateral de quatro nós

O elemento triangular é bastante utilizado devido a sua simplicidade, porém essa aproximação considera que as deformações sejam constantes no elemento. Em algumas situações pode ser mais adequado utilizar outros elementos que permitam uma variação interna da deformação. O elemento quadrilateral de quatro nós, representado pela Figura 9, permite a captura dessa variação da deformação no elemento, sendo uma alternativa ao elemento triangular de três nós. A dedução aqui apresentada, para a obtenção da formulação desse tipo de elemento, foi baseada em Chandrupatla; Belegundu (2011).

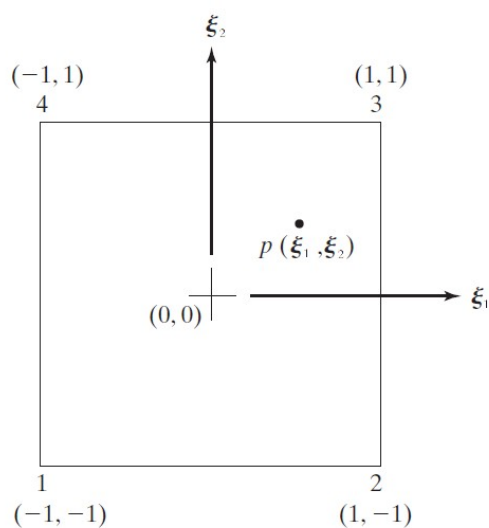
Figura 9 – Elemento Quadrilátero de 4 nós



Fonte: Próprio autor

Com intuito de se utilizar uma integração numérica, é interessante definir um elemento retangular base em um sistema de coordenada de referência. A Figura 10 ilustra esse elemento de referência.

Figura 10 – Elemento quadrático de referência



Adaptado de: Chandrupatla; Belegundu (2011)

Analogamente, deve-se determinar as funções de forma sabendo que estas devem respeitar a relação 4.1.37. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\
\phi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\
\phi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\
\phi_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)
\end{aligned} \tag{4.1.41}$$

Portanto utilizando a Equação 4.1.27,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_e &= u_{e1}\phi_1 + u_{e2}\phi_2 + u_{e3}\phi_3 + u_{e4}\phi_4 \\
\tilde{v}_e &= v_{e1}\phi_1 + v_{e2}\phi_2 + v_{e3}\phi_3 + v_{e4}\phi_4
\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

A relação acima pode ser representada na forma matricial como apresentado na Equação 4.1.28.

As coordenadas iniciais do elemento podem ser representadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
x_e &= x_{e1}\phi_1 + x_{e2}\phi_2 + x_{e3}\phi_3 + x_{e4}\phi_4 \\
y_e &= y_{e1}\phi_1 + y_{e2}\phi_2 + y_{e3}\phi_3 + y_{e4}\phi_4
\end{aligned} \tag{4.1.43}$$

Para uma função  $f$  qualquer, uma mudança de coordenadas implicará a seguinte relação entre as derivadas parciais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.1.44}$$

Sendo  $\mathbf{J}$  o jacobiano da transformação que será dado pela seguinte relação:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{4.1.45}$$

Da Equação 4.1.44, pode ser obtida também a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (4.1.46)$$

Substituindo  $f$  por  $u$  e  $v$  respectivamente, têm-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (4.1.47)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$

Sendo assim, utilizando a Equação 4.1.22, obtém-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (4.1.48)$$

que pode ser representada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.1.49)$$

Definindo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1.50}$$

e utilizando a forma matricial para os deslocamentos como apresentado na Equação 4.1.27, têm-se

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{A} \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} \mathbf{u} \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_2 \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.1.51}$$

Sendo

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A} \mathbf{G} \boldsymbol{\phi} \tag{4.1.52}$$

Sabe-se que

$$dx \, dy = \det \mathbf{J} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \tag{4.1.53}$$

portanto para uma espessura constante  $h_e$  e utilizando o PTV analogamente ao elemento triangular, é obtida a seguinte relação:

$$h_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_2 \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}_2 \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{J} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, \mathbf{u} = h_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} \det \mathbf{J} \, d\xi_1 \, d\xi_2 + \dots \tag{4.1.54}$$

Nota-se que a Equação 4.1.54 resultará em um sistema da forma

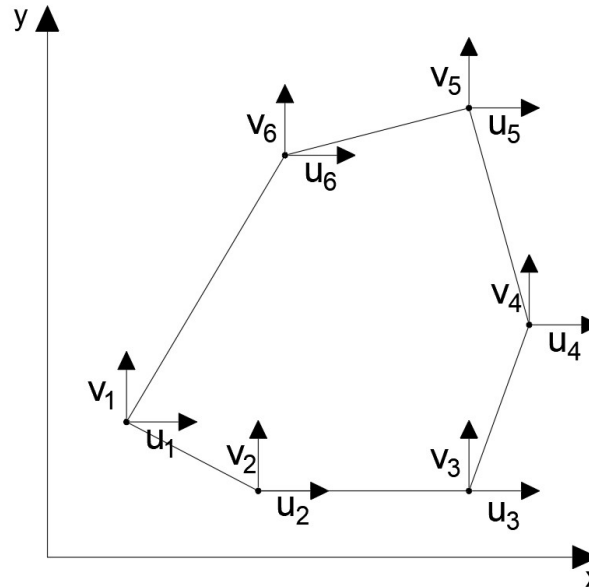
$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \tag{4.1.55}$$

que será resolvido analogamente ao exposto antes.

#### 4.1.2.3 Elemento poligonal convexo

Apesar da maior complexidade, malhas com elementos poligonais fornecem diversas vantagens com relação aos elementos apresentados. A Figura 11 representa um elemento polígono convexo.

Figura 11 – Elemento Poligonal Convexo



Fonte: Próprio autor

Elementos poligonais fornecem grande flexibilidade para a geração de malha, sendo melhor indicado para aplicações na mecânica dos sólidos que envolvem uma significativa mudança da topologia no material do domínio; apresentam melhor precisão nas soluções numéricas; possuem uma menor sensibilidade a travamento. (SUKUMAR; TABARRAEI, 2004)

Em seu trabalho, Sukumar; Tabarraei (2004) apresentam diversos tipos de funções de formas que podem ser utilizadas na resolução de problemas com elementos poligonais. Dentre destas, as funções de forma de Wachspress (1975), denominadas neste texto de funções de Wachspress, foram utilizadas no trabalho de Talischi et al. (2012b) e também serão utilizadas neste trabalho.

Segundo Sukumar; Tabarraei (2004), são características desejáveis das funções de formas:

- Ser não negativas, interpoladoras e formar uma partição de unidade, ou seja,

$$0 \leq \phi_i(\mathbf{x}) \leq 1$$

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1$$

(4.1.56)

- Possuir precisão linear, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) x_i = x \quad (4.1.57)$$

- Ser precisamente linear no contorno, ou seja,

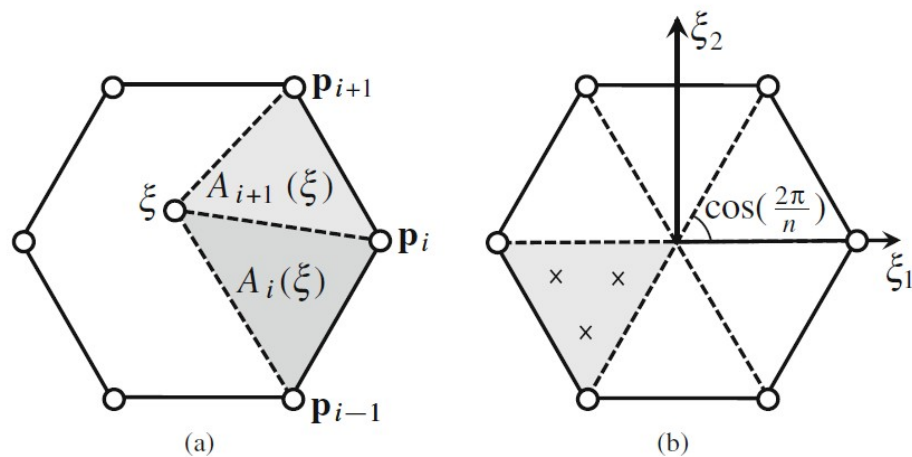
$$u^h(t) = t u_1 + (1-t) u_2, \quad x = t x_1 + (1-t) x_2, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, 1] \quad (4.1.58)$$

Sukumar; Tabarraei (2004) e Dasgupta (2003) garantem que tais propriedades são respeitadas pela função Wachspress.

Semelhantemente ao elemento quadrilátero de 4 nós, é interessante utilizar uma forma de polígono regular como base para determinar as funções de forma, e também interpoladoras, nessa coordenada.

Como exemplificação será considerado um elemento hexagonal (Figura 11 e Figura 12) – mas a generalização para polígonos de maior ou menor grau é direta –, para se demonstrar o procedimento utilizado na determinação das funções de forma e da matriz de rigidez.

Figura 12 – Elemento poligonal convexo procedimento cálculo



(a) representação das áreas triangulares usados na formulação. (b) Triangulação de referência no polígono regular e pontos de integração definidos em cada triângulo.

Fonte: Talischi et al. (2012b)

A função Wachspress tem seu desenvolvimento baseado em coordenadas baricêntricas. Talischi et al. (2012b) usa as definições de Sukumar; Tabarraei (2004) para estabelecer as seguintes relações utilizadas em seu trabalho:



$$\phi_i(\xi) = \frac{\alpha_i(\xi)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(\xi)} \quad (4.1.59)$$

Em que  $\alpha_i$  são interpolantes da forma:

$$\alpha_i(\xi) = \frac{A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})}{A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \xi) A(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \xi)} \quad (4.1.60)$$

Sendo  $A$  a função que fornece a área, com respectivo sinal, do triângulo formado pelos pontos do argumento. Em um polígono regular, a parcela  $A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})$  é igual para todo  $i$ , podendo ser fatorado. Desta forma, adotando-se a notação

$$A_i(\xi) := A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})$$

pode-se obter a seguinte fórmula:

$$\alpha_i(\xi) = \frac{1}{A_i(\xi) A_{i+1}(\xi)} \quad (4.1.61)$$

A área  $A_i(\xi)$  pode ser dada pela conhecida fórmula do determinante matricial para a área de um triângulo:

$$A_i(\xi) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ p_{1,i-1} & p_{2,i-1} & 1 \\ p_{1,i} & p_{2,i} & 1 \end{vmatrix} \quad (4.1.62)$$

Desta forma, as derivadas parciais da área com relação às coordenadas de referência são fornecidas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \xi_1} = \frac{1}{2} (p_{2,i-1} - p_{2,i}) \quad , \quad \frac{\partial A_i}{\partial \xi_2} = \frac{1}{2} (p_{1,i-1} - p_{1,i}) \quad (4.1.63)$$

As derivadas das funções interpolantes são obtidas pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} = -\alpha_i \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} + \frac{1}{A_{i+1}} \frac{\partial A_{i+1}}{\partial \xi_k} \right) \quad (4.1.64)$$

Portanto, as derivadas das funções de forma com relação as coordenadas de referência são

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} - \phi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial \xi_k} \right) \quad (4.1.65)$$

Com o uso de tais relações e analogamente ao feito com o elemento quadrilátero de 4 nós, pode-se, a partir do PTV – Equação 4.1.24 –, obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} h_e \int_{S_e} (\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \mathbf{u} = & h_e \int_{S_e} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} \det \mathbf{J} d\xi d\eta + \dots \\ & \dots + \int_{S_{eo}} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.1.66)$$

Em que  $S_e$  é a área correspondente ao elemento.

A integração numérica faz-se separando o polígono regular em triângulos. Utilizando uma quadratura, resolve-se um por um somando-os para a obtenção da integral total.

Ressalta-se que os interpolantes podem ser utilizados tanto para a aproximação do campo de deslocamentos através dos valores nodais, quanto para a transformação das coordenadas do elemento inicial para o elemento de referência da integração.

#### 4.1.3 Malhas de elementos finitos

Apesar do Método dos Elementos Finitos se apresentar como uma ferramenta poderosa para a resolução de diversos problemas, requer a discretização, geração da malha, adequada do domínio. Como a elaboração de modo manual das malhas pode demandar uma quantidade de dados de entrada considerável, essa pode ser feita através de programas ou algoritmos.

Segundo Zienkiewicz; Phillips (1971) existem duas filosofias, cada uma com suas vantagens e desvantagens, que podem ser adotadas para a geração da malha:

- A malha é obtida com o fornecimento de uma mínima quantidade de informações de forma digital.
- A malha é obtida com a entrada de uma interação gráfica.

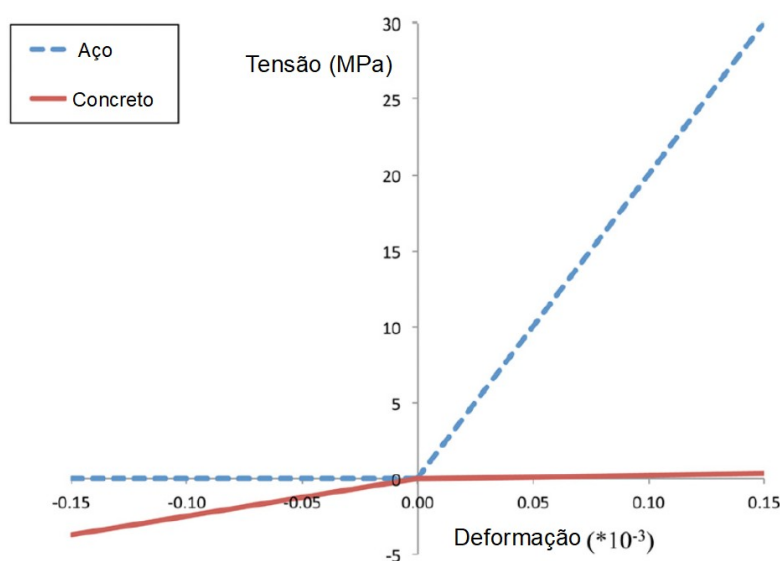
Frey; George (2000) apresenta em seu livro os fundamentos teóricos para construção de malhas. Além disso, são apresentados as diversas metodologias existentes bem como algoritmos que podem ser utilizados para casos específicos na geração de malhas.

Neste trabalho, para a geração de malha, utilizou-se o algoritmo PolyMesher – apresentado anteriormente –; pois, como ponto de partida para a formulação híbrida, o algoritmo PolyTop – que inclui o PolyMesher em seu algoritmo – será modificado.

## 4.2 Relações constitutivas

O concreto não possui uma relação linear de tensão e deformação e, como apresentando na seção 3.1, seu comportamento varia bastante de acordo com o tipo de tensão aplicada, compressão ou tração. Apesar disso, seu comportamento, para efeitos de cálculos, pode ser aproximado com relações lineares. Gaynor; Guest; Moen, (2013) assumiram módulos de elasticidade constantes para a faixa de compressão (24,9 GPa) e para a faixa de tração (2,0 GPa). A Figura 13 representa o modelo adotado.

Figura 13 – Relação tensão deformação concreto Gaynor; Guest; Moen (2013)



Adaptado de Gaynor; Guest; Moen (2013)

O modelo analítico para o comportamento constitutivo do concreto utilizado por Gaynor ;Guest; Moen, (2013) foi baseado em Darwin; Pecknold (1977). No trabalho, é destacado o comportamento diverso do concreto submetido a tensão multiaxial, apresentando-se um modelo destinado ao uso em elementos finitos.

No modelo, o módulo de elasticidade é função das tensões principais e suas respectivas direções. Na seção 4.1.2, apresentou-se as relações de tensão e deformação no problema bidimensional, também se introduziu a matriz  $\mathbf{D}$  para o caso isotrópico. No entanto, o modelo de Darwin e Pecknold (1977) não utiliza uma matriz isotrópica, mas uma matriz ortotrópica.

A relação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

será agora

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D}_p(\boldsymbol{\sigma}_p) \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4.2.1)$$

Em que:

$\boldsymbol{\sigma}_p$  é o vetor de tensão nas coordenadas principais;

$\mathbf{D}_p$  é a matriz constitutiva, nas coordenadas principais, dependente das tensões principais;

$\boldsymbol{\varepsilon}_p$  é a deformação nas coordenadas principais.

A matriz constitutiva  $\mathbf{D}_p$  é definida como:

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{1 - \nu_{eff}^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{eff} E_{12} & 0 \\ \nu_{eff} E_{12} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25(E_1 + E_2 - 2\nu_{eff} E_{12}) \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

Em que:

$$E_i = E_{ct} \quad , \quad \nu_i = \nu_{ct} \quad \text{se} \quad \sigma_{ci} > 0 \quad ;$$

$$E_i = E_{cc} \quad , \quad \nu_i = \nu_{cc} \quad \text{se} \quad \sigma_{ci} \leq 0 \quad ;$$

$$E_{12} = \sqrt{E_1 E_2} \quad ; \quad (4.2.3)$$

$$\nu_{eff} = \sqrt{\nu_1 \nu_2} \quad ;$$

$$\nu_{ct} = \nu_{cc} \frac{E_{ct}}{E_{cc}} \quad .$$

As variáveis  $E_{cc}$  e  $E_{ct}$  são os módulos de elasticidade na compressão e tração respectivamente do concreto. A variável  $\nu_{cc}$  é o “coeficiente de Poisson na compressão” e foi admitido por Gaynor; Guest; Moen (2013) como 0,2. A variável

$\nu_{ct}$  pode ser interpretada como o “coeficiente de Poisson na tração”. A variável  $\nu_{eff}$ , por sua vez, é coeficiente de Poisson efetivo, considerando a tensão atuante nas duas direções.

As tensões e direções principais podem ser calculadas com as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}\sigma_{p1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

Pode-se obter a matriz constitutiva  $\mathbf{D}_p$  na direção principal rotacionando a matriz  $\mathbf{D}$ . Para isso, será apresentado brevemente a rotação por tensores, em forma matricial, demonstrando a dedução da rotação nas coordenadas materiais.

Sabe-se que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \sigma_{p11} & \sigma_{p12} \\ \sigma_{p12} & \sigma_{p22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) \\ -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{p11} & \frac{\varepsilon_{p12}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{p12}}{2} & \varepsilon_{p22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) \\ -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\varepsilon_{12}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{12}}{2} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.2.5)$$

Fazendo as devidas multiplicações e transformando em coordenadas materiais, pode-se obter

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_p &= \begin{bmatrix} \sigma_{p11} \\ \sigma_{p22} \\ \sigma_{p12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p)\sigma_{11} + 2\sin(\theta_p)\cos(\theta_p)\sigma_{12} + \sin^2(\theta_p)\sigma_{22} \\ \cos^2(\theta_p)\sigma_{22} - 2\sin(\theta_p)\cos(\theta_p)\sigma_{12} + \sin^2(\theta_p)\sigma_{11} \\ \cos^2(\theta_p)\sigma_{12} + \sin(\theta_p)\cos(\theta_p)(\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \sin^2(\theta_p)\sigma_{12} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p) & \sin^2(\theta_p) & 2\sin(\theta_p)\cos(\theta_p) \\ \sin^2(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) & -2\sin(\theta_p)\cos(\theta_p) \\ -\sin(\theta_p)\cos(\theta_p) & \sin(\theta_p)\cos(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p11} \\ \varepsilon_{p22} \\ \varepsilon_{p12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p) \sigma_{11} + \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \varepsilon_{12} + \sin^2(\theta_p) \varepsilon_{22} \\ \cos^2(\theta_p) \varepsilon_{22} - \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \varepsilon_{12} + \sin^2(\theta_p) \varepsilon_{11} \\ \cos^2(\theta_p) \varepsilon_{12} + 2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) (\varepsilon_{22} - \sigma_{11}) - \sin^2(\theta_p) \varepsilon_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ -2 \sin(\theta) \cos(\theta) & 2 \sin(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.2.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{Q}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.2.9)$$

Invertendo  $\mathbf{Q}_s$  na Equação 4.2.7, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_s^{-1} \mathbf{D}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

Fazendo o uso da Equação 4.2.9, resulta-se a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_s^{-1} \mathbf{D}_p \mathbf{Q}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}$$

Então pode-se definir:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}_s^{-1} \mathbf{D}_p \mathbf{Q}_\varepsilon \quad (4.2.10)$$

Sendo

$$\mathbf{Q}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p) & \sin^2(\theta_p) & -2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ \sin^2(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) & 2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_p) & \sin^2(\theta_p) & \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ \sin^2(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) & -\sin(\theta_p) \cos(\theta_p) \\ -2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & 2 \sin(\theta_p) \cos(\theta_p) & \cos^2(\theta_p) - \sin^2(\theta_p) \end{bmatrix}$$

De forma que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

reestabelecendo-se a Equação 4.1.21 nas coordenadas de referência. Nota-se também que

$$\mathbf{Q}_s^{-1} = \mathbf{Q}_\varepsilon^t$$

### 4.3 Otimização

Otimizar é obter a melhor solução possível para determinado problema, respeitando as restrições impostas. Sendo assim, a otimização é bastante almejada nas diversas engenharias. Com o advento da computação surgiram os problemas de otimização voltados a programação. Atualmente a resolução desses problemas é de fundamental importância, surgindo assim diversas técnicas matemáticas que podem ser utilizadas.

Normalmente, os problemas de otimização são resolvidos computacionalmente. Fritzsche (1978) afirma que formular um problema é avaliar os objetivos de construir um modelo matemático suficientemente complexo captando, com a exatidão requerida, o problema real manejavelmente. De acordo com Fritzsche, existem 5 fases na implementação de uma programação matemática: Transformação do problema real em um programa matemático; Coleta de dados para os coeficientes do programa matemático; Execução; Análise de sensibilidade; Apresentação dos resultados.

As seções seguintes apresentarão os conceitos necessário de otimização e a transformação do problema real em problema matemático, permitindo sua resolução computacionalmente.

#### 4.3.1 Forma geral de um problema de otimização

Problemas de otimização são formados por dois gêneros de variáveis – variáveis de projeto e variáveis de estado – e dois gêneros de funções – função objetiva e função de restrição.

As variáveis de projeto são funções ou vetores que descrevem elementos da estrutura e que serão alteradas no processo de otimização e na otimização estrutural, por exemplo, podem ser referentes à área, espessura ou descrever o formato de determinada estrutura. As variáveis de estado são as demais que estão ligadas as variáveis de projeto indicando respostas às mudanças dessas últimas e na otimização estrutural podem ser os deslocamentos, as tensões ou até mesmo as forças.

Função objetivo é função principal cujo valor ótimo será procurado. Frequentemente é escolhida uma função em que menores valores indicam melhora ou resultado mais próximo do ótimo. Função de restrição é aquela que está presente

em um problema de otimização para restringir o domínio da solução e em otimização estrutural, por exemplo, pode ser um limite máximo de tensão ou volume.

Geralmente o problema é da seguinte forma:

$$(PO) \begin{cases} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ com respeito a } \mathbf{x} \\ \text{Sujeito a } \begin{cases} \text{Restrições em } \mathbf{y} \\ \text{Restrições em } \mathbf{x} \end{cases} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Em que PO é um termo genérico para Problema de Otimização.

#### 4.3.2 Tipos de variáveis de projeto

As variáveis de projeto podem ser de dimensão finita, pertencendo a um espaço de  $R_n$  de  $n$  grupo de números reais ou podem ser funções que possuem um infinito número de graus de liberdade. (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009)

Variáveis discretas são definidas por um número finito de graus de liberdade. Um exemplo é o problema de otimização dimensional de uma treliça considerando constante as áreas dos elementos. Portanto, existe uma quantidade finita de variáveis, a qual é igual ao número de elementos e referente as suas áreas, que assumirão valores de número reais. O problema abordado nesse trabalho será deste tipo.

Variáveis de parâmetro distribuída são definidas por funções. Um exemplo é o problema de determinar a função, caminho, que percorre a menor distância entre dois pontos. Então, agora, um funcional será otimizado, que, no caso exemplificado, é dado pelo comprimento da curva o qual pode ser resultado de um integral de linha.

#### 4.3.3 Mínimo e máximo local e global

Um conceito de cálculo extremamente ligado a otimização é o de mínimo e máximo local e global de uma função. Encontrar a melhor solução de determinado problema em otimização nada mais é do que achar um mínimo ou máximo de uma determinada função submetida a uma série de restrições.

Supondo uma função  $g(x)$  (dependente somente de uma variável), e fornecendo-se um limite inferior e superior desta variável, ou seja,  $x^{inf} \leq x \leq x^{sup}$ ; o mínimo ou máximo global desse intervalo localizar-se-á ou nos limites do intervalo



ou em um dos pontos de derivada nula, definido como pontos estacionários que, por sua vez, são correspondentes aos mínimos locais da função no intervalo.

Um problema de otimização geralmente será composto por várias variáveis e restrições. Sendo assim, a função a ser minimizada é uma função de múltiplas variáveis (  $g_0(\mathbf{x})$  ) – em que  $\mathbf{x}$  é um vetor contendo todas as variáveis de projeto

$x_i$  e cada variável é definida em um determinado intervalo, ou seja,  $x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}$  – e existirão uma série de funções de restrições (  $g_i(\mathbf{x})$  ). Desta maneira, um problema de otimização pode ser escrito da seguinte forma:

$$(P) = \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} g_0(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Em que  $\chi = \{\mathbf{x} \in R^n : x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}\}$  e P é um termo genérico para problema.

Analogamente ao caso unidimensional, os pontos de mínimo e máximo de uma função sem restrição se encontrarão nos pontos estacionários, ou seja, pontos que respeitam a seguinte relação:

$$\nabla g_0(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_0(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.3)$$

Em que  $\nabla$  é o operador diferencial vetorial.

Para problemas com restrições, o máximo e mínimo podem não estar localizados nos pontos estacionários, pois podem se encontrar no limite do domínio. Sendo assim, necessitam-se técnicas de programação não linear para encontrar a solução. A melhor solução corresponderia aos mínimos globais das funções submetidas a restrições, no entanto distinguir um mínimo global de um local é uma tarefa bastante complicada, portanto, geralmente, os algoritmos existentes se limitam a encontrar mínimos sem identificar se é local ou global.

#### 4.3.4 Multiplicadores de Lagrange

O problema apresentado pela equação 4.3.2 é composto por uma função objetivo, que será otimizada, e uma série de funções de restrições, que precisam ser respeitadas. Trabalhar com muitas funções e inequações simultaneamente pode ser

complicado. Desta forma, surgiu a Método dos Multiplicadores de Lagrange, que impõe as restrições de forma fraca.

Definindo uma função  $J(\mathbf{x})$  tal que

$$J(\mathbf{x}) = \begin{cases} g_0(\mathbf{x}), & \text{se } g_i \leq 0 \forall i \\ \infty, & \text{se contrário} \end{cases} = g_0(\mathbf{x}) + \sum_i^n I[g_i(\mathbf{x})] \quad (4.3.4)$$

em que

$$I[u] = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 0 \\ \infty, & \text{se contrário} \end{cases}$$

Observa-se que  $I[u]$  penaliza a função  $J(\mathbf{x})$  caso as restrições  $g_i(\mathbf{x})$  sejam desrespeitadas. Portanto,

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x})$$

retorna o problema  $(P)$ .

Substituindo  $I[u] = \lambda u$ ,  $\lambda \geq 0$ , é obtida a função Lagrangiana dependente de  $\mathbf{x}$  e  $\lambda$ :

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (4.3.5)$$

Nota-se que

$$\max_{\lambda} L(\mathbf{x}, \lambda) = J(\mathbf{x})$$

e portanto

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\lambda} L(\mathbf{x}, \lambda) \quad (4.3.6)$$

é a solução do problema  $(P)$ .

#### 4.3.5 Dualidade Lagrangiana

A Dualidade Lagrangiana é um artifício que geralmente facilita a resolução de um problema de otimização. Define-se a função dual como:

$$h(\lambda) = \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) \quad (4.3.7)$$

Sendo assim,

$$\max_{\lambda} h(\lambda) \quad \text{ou} \quad \max_{\lambda} \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda) \quad (4.3.8)$$

será o problema dual. Esse problema pode ser mais fácil de se resolver do que o problema original exibido pela equação 4.3.6.

Em geral,

$$p^* = \max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda) \leq \min_x \max_{\lambda} L(x, \lambda) = d^* \quad (4.3.9)$$

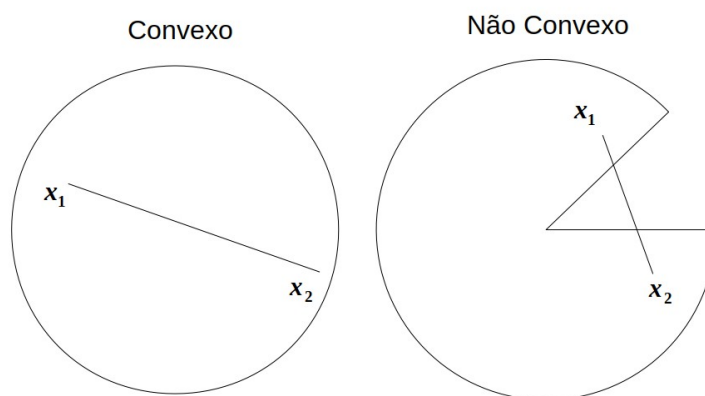
A diferença  $p^* - d^* = e^*$  é conhecida como diferença da otimização dual. Para problemas que possuem um valor baixo de  $e^*$ , diz-se que há uma melhor dualidade do problema. Para alguns problemas, esse valor pode ser até mesmo nulo, existindo correspondência entre os dois problemas, como é o caso de problemas convexos. Ainda assim, se estes valores forem distintos,  $p^*$  ao menos fornecerá um limite inferior do problema  $(P)$ . (KNOWLES, 2010)

#### 4.3.6 Problemas Convexos

Problemas de Otimização Convexos possuem propriedades desejáveis, como a citada na seção anterior, que facilitam sua resolução. Um problema será convexo se estiver definido em um conjunto convexo e formado por funções convexas.

Um conjunto  $\chi \subset R^n$  será convexo se todos pontos de um segmento de reta que liga qualquer dois pontos desse conjunto também pertencem a esse conjunto. A Figura 14 demonstra um exemplo de um conjunto convexo e um conjunto não convexo no  $R^2$ .

Figura 14 – Conjunto convexo e conjunto não convexo



Fonte: Próprio autor

Em linguagem algébrica um conjunto será convexo se

$$\lambda x_i + (1-\lambda)x_j \in \chi, \quad \forall x_i \text{ e } x_j \in \chi \quad (4.3.10)$$

em que  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $\chi$  é o domínio.

Já uma função  $F(x)$  será convexa se

$$F(\lambda x_i + (1-\lambda)x_j) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \quad (4.3.11)$$

em que, novamente,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Isso significa que se escolhido dois pontos aleatórios,  $x_1$  e  $x_2$ , no conjunto  $\chi$ , o segmento de reta que liga  $F(x_1)$  e  $F(x_2)$  se encontra acima dos pontos correspondentes à imagem da função no subconjunto referente aos pontos da linha que liga  $x_1$  a  $x_2$ . A função será estritamente convexa se na Equação 4.3.11 for trocado  $\leq$  por  $<$ . Uma função  $F(x)$  será côncava se  $-F(x)$  for convexa, sendo estritamente côncava se observado o que foi dito anteriormente. Observa-se então que um problema de otimização côncavo pode ser transformado em um problema convexo e vice e versa.

Muitos problemas da engenharia estrutural são não convexos, porém pode-se transformar problemas não convexos em convexos por regiões, utilizando aproximações, e resolvê-los iterativamente. A próxima seção abordará três tipos de aproximações convexas.

#### 4.3.7 Aproximações convexas

Nessa seção, serão abordados os três tipos de aproximações muito utilizadas. A Programação Sequencial Linear (SLP), Programação Sequencial Quadrática (SQP), Linearização Convexa (CONLIN).

##### 4.3.7.1 Programação Sequencial Linear

Uma função  $f(x)$  pode ser aproximada localmente, em torno de  $x^k$ , pela expansão da série de Taylor, que truncada no primeiro termo é expressa por:

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) \quad (4.3.12)$$

Desta forma, o problema  $(P^k)$  pode também ser linearizado em torno de  $x^k$ , sendo obtido a seguinte relação.

$$(P^k) = \begin{cases} \min_x g_0(\mathbf{x}^k) + \nabla g_0(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \\ s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) + \nabla g_i(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \leq 0 \\ \mathbf{x} \in \chi \\ -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k, j=1,2,3,\dots,n \end{cases} \quad (4.3.13)$$

Em que  $l_j^k$  e  $u_j^k$  são limites móveis, pois essa aproximação linear só é adequada próxima a  $\mathbf{x}^k$ .

#### 4.3.7.2 Programação Sequencial Quadrática

O método da Programação Sequencial Quadrática será apresentado somente para demonstrar alternativas que podem ser utilizadas na resolução do problema. Neste método, apenas é acrescentado o termo de segunda ordem da expansão de Taylor, portanto:

$$(P^k) = \begin{cases} \min_x g_0(\mathbf{x}^k) + \nabla g_0(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \\ s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) + \nabla g_i(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \leq 0 \\ \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Em que  $\mathbf{H}$  é o Hessiano

Não sendo necessário os limites impostos anteriormente devido ao fato da aproximação ser melhor em torno de  $\mathbf{x}^k$ .

#### 4.3.7.3 Linearização Convexa

Suponha uma função do tipo:

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} w(x_2) \quad (4.3.15)$$

Observa-se que pode ser melhor linearizar a função  $h$ , com relação a variável  $x_1$ , em função de  $x_1^{-1}$  em vez de diretamente em relação a  $x_1$ . A ideia da linearização convexa é linearizar a função  $g_i(\mathbf{x})$  na variável  $y_j$  que se relaciona com a variável original  $x_j$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 y_j &= x_j \quad \text{se } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} > 0 \\
 y_j &= \frac{1}{x_j} \quad \text{se } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3.16}$$

Sendo assim a aproximação será definida da seguinte forma:

$$(P^k) = \begin{cases} \min_x g_0(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_0(\mathbf{x}^k)}{\partial y_j} (y_j(x_j) - y_j(x_j^k)) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^k)}{\partial y_j} (y_j(x_j) - y_j(x_j^k)) \leq 0 \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k, j=1,2,3 \end{cases}
 \tag{4.3.17}$$

A derivada parcial  $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$  pode ser obtida pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial g_i}{\partial y_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_j}
 \tag{4.3.18}$$

Portanto, para as duas situações, a parcela

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{x}^k)}{\partial y_j} (y_j(x_j) - y_j(x_j^k))
 \tag{4.3.19}$$

fica

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_i}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) \quad \text{se } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} > 0 \\
 \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \frac{x_j^k (x_j - x_j^k)}{x_j} \quad \text{se } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3.20}$$

#### 4.3.8 Condições de KKT

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), em geral, são condições necessárias, mas não suficientes, para que determinado  $\mathbf{x}$  seja uma solução ótima de um problema (P). Porém, para problemas convexos, as condições de KKT são necessárias e suficientes para indicar o mínimo global. Utilizando a função Lagrangiana definida na Equação 4.3.5, as condições de KKT são definidas como:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \leq 0, \text{ se } x_j = x_j^{\max} \\
\text{b)} \quad & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0, \text{ se } x_j^{\min} < x_j < x_j^{\max} \\
\text{c)} \quad & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \geq 0, \text{ se } x_j = x_j^{\min} \\
\text{d)} \quad & \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0 \\
\text{e)} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\
\text{f)} \quad & \lambda_i \geq 0 \\
\text{g)} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X}
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

#### 4.3.9 Problemas separáveis

Problemas separáveis possuem uma propriedade que, se aproveitada, facilita a resolução deles. Suponha uma função  $f(\mathbf{x})$  que possui a propriedade de ser expressa como uma soma de funções de somente uma variável, ou seja:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \tag{4.3.22}$$

É fácil provar que a separação desta função permite a resolução separada de cada função  $f_i(x_i)$  para se obter o mínimo da função  $f(\mathbf{x})$ . Seja  $x_i^*$  o ponto ótimo da função  $f_i(x_i)$  e  $\mathbf{x}^*$  o vetor formado pelos elementos  $x_i^*$ , sendo assim:

$$f_i(x_i^*) \leq f_i(x_i), \forall x_i \tag{4.3.23}$$

Mas a simples soma de todas as inequações para todo  $i$  fornecerá

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \forall x_i \tag{4.3.24}$$

que por sua vez é

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \tag{4.3.25}$$

e portanto  $f(\mathbf{x}^*)$  é solução do problema.

A separação de variáveis apresenta vantagens para o uso da dualidade lagrangiana em funções convexas. Suponha uma função lagrangiana de um problema convexo que seja formada por funções separáveis:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^m f_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{ij}(\mathbf{x}) \right)$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^m (f_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_{ij}(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^m L_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3.26)$$

A função dual é expressa por:

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{j=1}^m L_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^m \min_{x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}} L_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3.27)$$

A resolução de cada subproblema

$$\min_{x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}} L_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\lambda})$$

é feita através da minimização restrita de funções de uma variável, que é dada pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{se } \frac{\partial L(x_j^{\min}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \geq 0, \text{ então } x_j = x_j^{\min} \\ \text{b)} \quad & \text{se } \frac{\partial L(x_j, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0, \text{ então } x_j^* = x_j^*(\boldsymbol{\lambda}) \\ \text{c)} \quad & \text{se } \frac{\partial L(x_j^{\max}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \leq 0, \text{ então } x_j = x_j^{\max} \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Como o problema é convexo e portanto  $L_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\lambda})$  também é convexo, somente existirá uma solução para esse problema de minimização. O problema inicial então é resolvido maximizando a função dual,  $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ , para  $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ . Como a função dual é sempre côncava, obtém-se

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\lambda})) \quad (4.3.29)$$

Em que esta última equação pode ser resolvida por algum método numérico.

#### 4.3.10 Critério de Otimalidade (Optimality Criteria)

Na seção 4.3.6, foram apresentadas as aproximações convexas como recurso para encontrar o ponto ótimo. Nesta seção será apresentado o método utilizado por Talischi et al., 2012b, que é um método bastante usado na engenharia estrutural, e seguirá a lógica adotada na aproximação de Linearização Convexa.



Suponha que uma função  $f$  seja linearizada em uma variável intermediária  $h$  tal que

$$h_i = \left( \frac{x_i - x_{inf}}{x_{sup} - x_{inf}} \right)^a \quad (4.3.30)$$

em que  $x_{inf}$ ,  $x_{sup}$  são respectivamente o limite inferior e superior do domínio da variável de projeto, e  $a$  é um valor que pode ser variado de acordo com a aproximação.

Então, usando a série de Taylor e truncando no primeiro termo,

$$f_{app}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial h_i} \right|_{x_i=x_i^k} (h_i - h_i^k) \quad (4.3.31)$$

Aplicando a regra da cadeia para a derivada de  $f$ , têm-se

$$\frac{\partial f}{\partial h_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial h_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\frac{d h_i}{d x_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \left[ \frac{a(x_i - x_{inf})^{a-1}}{(x_{sup} - x_{inf})^a} \right] = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{(x_{sup} - x_{inf})^a}{a} (x_i - x_{inf})^{1-a} \quad (4.3.32)$$

Desta forma, a Equação 4.3.31 pode ser expressa por

$$f_{app}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i^k} \frac{1}{a} (x_i^k - x_{inf}) \left[ \left( \frac{x_i - x_{inf}}{x_i^k - x_{inf}} \right)^a - 1 \right] \quad (4.3.33)$$

As funções de restrição são aproximadas linearmente na variável de projeto. Sendo assim,

$$g_{app}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i^k} (x_i - x_i^k) \quad (4.3.34)$$

Utilizando a função lagrangiana dada pela Equação 4.3.4, têm-se

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f_{app}(\mathbf{x}) + \lambda_i g_{app}(\mathbf{x})$$

Empregando funções separáveis e dualidade lagrangiana, pois a aproximação é convexa, pela hipótese (b) da Equação 4.3.28, é obtido

$$\frac{\partial f_{app}}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g_{app}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.3.35)$$

Para se resolver essa Equação 4.3.35 para  $\lambda$ , basta utilizar o método da bisseção. Desta forma, utilizando as Equações 4.3.33 e 4.3.34 em 4.3.35, obtém-se

$$\left( \frac{x_i - x_{inf}}{x_i^k - x_{inf}} \right)^{1-a} = \frac{- \frac{\partial f_{app}}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_i^k}}{\lambda \frac{\partial g_{app}}{\partial x_i} \Big|_{x_i = x_i^k}} := B_i \quad (4.3.36)$$

E portanto

$$x_i^* = x_{inf} + B_i^{\frac{1}{1-a}} (x_i^k - x_{inf}) \quad (4.3.37)$$

O valor de  $a$  será adotado  $-1$  para o problema em questão. Sendo observado as outras hipóteses da Equação 4.3.21 e impondo limites de validade para a aproximação, resultará em

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^+, & x_i^* \geq x_i^+ \\ x_i^-, & x_i^* \leq x_i^- \\ x_i^*, & x_i^- < x_i^* < x_i^+ \end{cases}$$

Em que:

$$x_i^- = \max(x_{inf}, x_i^k - M) \quad (4.3.38)$$

$$x_i^+ = \min(x_{sup}, x_i^k + M)$$

Sendo M um valor prefixado como a fração da diferença entre

$$x_{inf} \text{ e } x_{sup}$$

#### 4.4 Otimização Estrutural

Realizar uma otimização estrutural é organizar os elementos estruturais ou material componente de um elemento estrutural da melhor forma possível. Sendo assim, deve-se impor limitações: quantidade de material, tensão máxima, deformação máxima e etc; e buscar a melhor configuração possível que atenda as limitações impostas. (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

#### 4.4.1 Tipos de otimização estrutural

Existem diversos tipos de otimização geralmente visando tornar a estrutura mais rígida. Christensen e Klarbring (2009) descrevem os seguintes tipos:

- Otimização Dimensional ou Paramétrica: Almeja as melhores seções para uma estrutura fornecida.
- Otimização de Forma: Altera a forma de uma estrutura com o intuito de obter a melhor configuração, dada uma limitação de material.
- Otimização Topológica: Como o nome sugere, muda a topologia – modo pelo qual os elementos de uma determinada estrutura estão conectados. Ela permite a adoção de seções de elementos nulas, ou seja, que elementos sejam removidos da estrutura final.

Como este trabalho possui um foco na otimização topológica, que pode ser visto como uma variação da otimização dimensional, a seguir abordar-se-á esses dois tipos de otimização.

#### 4.4.2 Otimização dimensional

Na otimização dimensional, a variável de projeto é discreta, ou seja, dada por um número finito de graus de liberdade e corresponde com alguma dimensão da estrutura, como área ou espessura. Um exemplo é a otimização das seções dos elementos de uma treliça.

Um forma de otimizar uma estrutura é torná-la mais rígida com um limite imposto de volume máximo. Uma estrutura mais rígida é aquela que suporta mais carga com uma menor deformação. Desta maneira, pode-se definir uma grandeza que se relacionará com a rigidez, essa grandeza é o trabalho das forças externas (*Compliance*) definido por:

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.4.1)$$

Nota-se que quanto menor esse trabalho maior será a rigidez da estrutura. Portanto o problema  $(P)$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$(P)_d = \begin{cases} \min_x \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ s.t. \quad V - V_{max} \leq 0 \\ \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \quad (4.4.2)$$

em que:

$\mathbf{x}$  é o vetor com as dimensões da estrutura e pertence a um conjunto de possíveis valores  $\chi$  ;

$V$  é o volume da estrutura;

$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{F}$  é a relação proveniente do método dos elementos finitos.

A formulação acima gera algumas inconveniências devido à presença de muitas equações de restrições de igualdades representadas por  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$ . Como essas equações representam uma igualdade, é possível alterar a formulação simplificando-a. Pode-se tratar o vetor  $\mathbf{u}$  como uma função implícita encontrando a seguinte formulação mais simples:

$$(P)_{d2} = \begin{cases} \min_x \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad V - V_{max} \leq 0 \\ \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Em que agora  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é uma função implícita obtida pela relação  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$ .

A seguir, desenvolver-se-á uma derivada importante para a resolução desse problema.

Sabe-se que  $C = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{F}$ , portanto:

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \quad (4.4.4)$$

Derivando implicitamente  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{F}$  se obtém também

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \mathbf{0} \quad (4.4.5)$$

Fornecendo a seguinte relação:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{u} \quad (4.4.6)$$

Portanto,

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = -\mathbf{u}(\mathbf{x})^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.4.7)$$

Se o problema for convexo, pode-se resolvê-lo diretamente através de 4.3.8. Sendo assim, a função lagrangiana seria dada por:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = C(\mathbf{x}) + (V(\mathbf{x}) - V_{max})\lambda \quad (4.4.8)$$

Derivando com relação a variável  $x_j$  :

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (4.4.9)$$

Utilizando a Equação 4.3.28 e a Equação 4.3.29 esse problema pode ser resolvido, o que será feito posteriormente, na seção 4.4.3.1.2, para o caso de treliças.

Se o problema não for convexo pode-se utilizar uma aproximação convexa e resolvê-lo iterativamente. Nesse caso, aplica-se o que foi exposto na seção 4.3.10.

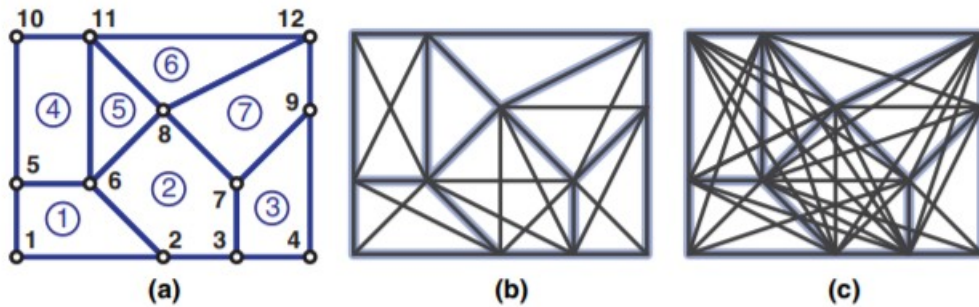
#### 4.4.3 Otimização Topológica

A otimização topológica modificará o modo em que os elementos de uma determinada estrutura estão conectados permitindo que alguns elementos do domínio inicial sejam retirados da estrutura final, ou seja, que a variável de projeto assumam valor nulo. Nos métodos numéricos, em geral, permitir que certas variáveis, como área e volume, assumam o valor zero acarretará em singularidades que precisam, portanto, ser resolvidas. Com exceção dessa particularidade, os conceitos básicos e necessários para o entendimento da otimização topológica foram apresentados nas seções anteriores. Nas próximas seções, serão expostos os métodos de otimização topológica mais utilizados.

##### 4.4.3.1 Método de Otimização Topológica Discreta

Este método aproxima um domínio contínuo através de uma densa malha de barras interconectadas em nós rotulados, ou seja, uma treliça – na literatura internacional conhecida como Ground Structure – a qual será otimizada quanto ao seu volume ou com referência ao trabalho das forças externas. A Figura 15 abaixo demonstra o processo de obtenção de uma treliça fornecido um domínio inicial.

Figura 15 – Geração da malha Ground Structure



(a) Malha de base com 7 elementos; (b) Ground structure com nível de conectividade 1; (c) Ground Structure com nível de conectividade 2

Fonte: Zegard; Paulino, (2014)

Para a otimização da treliça obtida pode-se utilizar essencialmente duas metodologias, elástica e plástica.

#### 4.4.3.1.1 Formulação elástica para o Método Otimização Topológica Discreta

Como apresentado anteriormente, a otimização topológica permite a mudança da topologia do objeto-problema. Portanto, permite que elementos possuam valores nulo nas variáveis avaliadas, por exemplo, área ou espessura.

A formulação Elástica para a Otimização Topológica Discreta partirá da Equação 4.4.3. O procedimento será bastante semelhante a otimização dimensional, porém existirão poucas diferenças quanto ao domínio da variável projeto e a filtragem dos valores resultantes da otimização.

Elementos com dimensão nula podem gerar singularidades na formulação de elementos finitos previamente apresentada. Portanto deve-se adaptar a formulação inserindo um termo  $\epsilon$ , tal que  $\epsilon \approx 0$  e  $\epsilon > 0$ . A nova formulação para obtenção da matriz de rigidez portanto será:

$$\int_0^L (\epsilon + (1-\epsilon)x) \left( \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} E \right) dx \quad (4.4.10)$$

O volume total da treliça seria:

$$V = I^T x$$

Em que :

$x$  é o vetor referente as áreas dos elementos

$I$  é o vetor referente aos comprimentos dos elementos

(4.4.11)

A filtragem do resultado final é feita através de um valor mínimo no qual as barras serão consideradas inexistentes, desta forma se estabelece um valor de corte

tal que, se alguma barra possua uma área menor do que este valor, será retirada da estrutura final. Observa-se que isso gerará um resíduo quanto ao equilíbrio das forças na estrutura, sendo necessário avaliar se esse resíduo é relevante, diminuindo o valor de corte até que um critério de aceitabilidade seja atingido.

#### 4.4.3.1.2 Resolução Analítica da Formulação Elástica

Resolvendo analiticamente o problema exposto em 4.4.2, pode-se obter condições para que determinado arranjo de valores do vetor área seja ótimo. Sabendo que o problema é convexo, as condições de KKT são suficientes para identificar um mínimo global. Sendo assim utilizando a Equação 4.4.8:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = C(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}^T \mathbf{I} - V_{max}) \lambda \quad (4.4.12)$$

Em que volume  $V$  foi substituído pela área de seção  $x$  vezes o comprimento  $l$ .

Sendo assim, há a seguinte relação:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_j} + l_j \lambda \quad (4.4.13)$$

Utilizando a Equação 4.4.7, trabalhando em coordenadas locais e utilizando a matriz de rigidez exibida na Equação 4.1.12 – sabendo que a área  $S$  agora é vista como variável  $x$  e o comprimento agora é dado por  $l$  –, têm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial x_j} = \frac{E}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.14)$$

Em que  $\mathbf{K}_j$  e  $l_j$  é respectivamente a matriz de rigidez e o comprimento do elemento  $j$ .

Desta forma, pode se obter a seguinte relação:

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = [u_1 \quad u_2] \frac{E}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{E(u_2 - u_1)^2}{l_j} = E \varepsilon^2 l_j = \frac{\sigma_j l_j}{E} \quad (4.4.15)$$

Inserindo em 4.4.12 e utilizando as condições da Equação 4.3.9, têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_j^2 &\leq \frac{\lambda^*}{E}, \text{ se } x_j^* = x_j^{\min} \\ \sigma_j^2 &= \frac{\lambda^*}{E}, \text{ se } x_j^{\min} < x_j^* < x_j^{\max} \\ \sigma_j^2 &\geq \frac{\lambda^*}{E}, \text{ se } x_j^* = x_j^{\max} \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Portanto, se todas as barras possuem uma seção ótima entre os limites estabelecidos da variável de projeto, essas estarão submetidas a uma mesma tensão em módulo. Desta forma, obtém-se uma configuração em que todas as barras estão em tensão máxima. Esse tipo de configuração também é conhecida como configuração plástica e é muito utilizada na otimização de treliças. A formulação plástica, então, considera esse resultado, assumindo que todos os elementos estão submetidos a tensão máxima do material, ou seja, plastificados.

#### 4.4.3.1.3 Formulação plástica para o Método da Otimização Topológica Discreta

A formulação plástica, por sua vez, força o equilíbrio, mas não considera as relações de compatibilidade de tensão-deformação. O algoritmo GRAND(ZEGARD; PAULINO, 2014), além de usar essa formulação, apresenta o volume como função objetivo e restrição de tensão; sendo assim, o problema de otimização resolvido por esse programa é da seguinte forma:

$$(P_{\text{plástico}}) = \begin{cases} \min_x V = \mathbf{l}^T \mathbf{a} \\ s. t \quad \mathbf{B}^T \mathbf{n} = \mathbf{f} \\ \sigma_c x_i \leq n_i \leq \sigma_t a_i, i = 1, 2, 3 \dots N_b, \\ \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \quad (4.4.17)$$

Em que  $\mathbf{B}$  é uma matriz de equilíbrio nodal construída a partir dos cossenos diretores dos elementos,  $\mathbf{n}$  é um vetor contendo a força axial de todos os membros da estrutura treliçada,  $\sigma_c$  é a tensão de compressão limite e  $\sigma_t$  é a tensão de tração limite.

#### 4.4.4 Método de Otimização Topológica Contínua

O Método de Otimização Topológica Contínua, aplicado em elementos bidimensionais ou tridimensionais, segue a mesma lógica da Otimização Topológica Discreta, na medida em que a estrutura do problema também pode ser expressa tanto na forma da Equação 4.4.2 quanto na forma da Equação 4.4.3. Portanto, tudo que foi exposto em 4.4.3.1 é aplicado também para elementos bidimensionais, sendo diferente o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos que será dado pela seção 4.1.2.

Essa seção apresentará as particularizações referentes à Método de Otimização Topológica Contínua, que almeja uma visão topológica pura, ou seja, aborda o objeto do problema de forma mais binária, priorizando somente a presença



ou não do material em determinada região, não permitindo valores intermediários da variável.

#### 4.4.4.1 Penalização de valores intermediários

O caráter binário citado é descrito por funções discretas. Trabalhar com tais funções pode ser bastante dificultoso, principalmente porque não permitem o uso de técnicas comuns de programação não linear. Desta maneira, é interessante criar funções contínuas que quando otimizadas retornam a característica binária desejada do problema. Uma forma é utilizar funções que de algum modo penalizam valores intermediários da variável  $x$  estudada.

Um método bastante utilizado em otimização estrutural é o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalisation*). Nesse método, é definida uma variável  $x_e$  para cada elemento tal que  $0 \leq x_e \leq 1$ . Essa variável possui um significado físico semelhante à densidade, sendo que a unidade significa presença de material e zero ausência. Portanto, a integral definida na Equação 4.1.66 é alterada para:

$$\int_S (\epsilon + (1 - \epsilon)x_e^q) (\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (4.4.18)$$

Em que :

$\epsilon$  é um valor pequeno positivo utilizado para evitar instabilidade numérica;

$q$  é um valor de penalização da variável  $x_e$ .

Observa-se que para  $q > 1$ , os valores intermediários serão penalizados, pois se um número entre zero e um for elevado por um número maior que um o resultado será menor que esse número.

O volume total da chapa será dado respectivamente por:

$$V = \mathbf{a}_c^T \mathbf{x}$$

Em que:

$\mathbf{x}$  é o vetor referente a densidade dos elementos  $x_e$  (4.4.19)

$\mathbf{a}_c$  é o vetor referente as áreas dos elementos de chapa

Nota-se que as espessuras dos elementos de chapa foram omitidas em 4.4.18, isso ocorre porque a análise feita é a da presença ou não de material sendo que todos os elementos analisados possuem a mesma espessura.

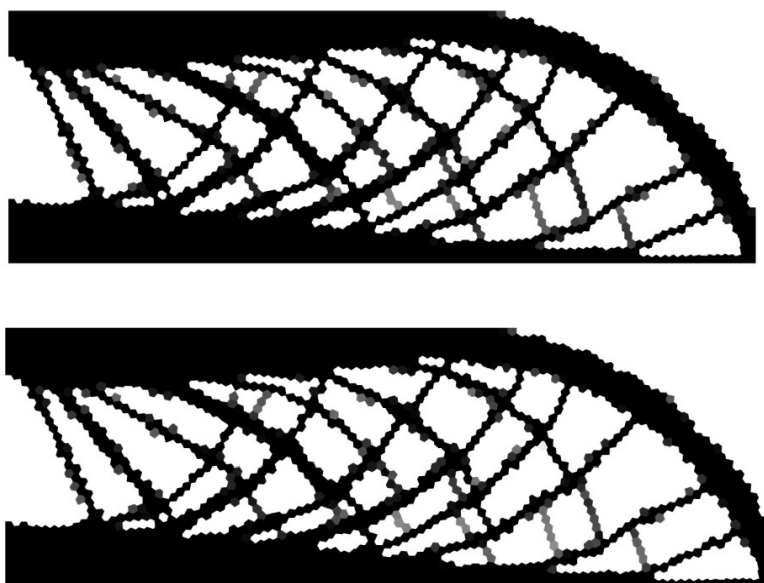
Porém, o problema se tornou mal condicionado, exigindo o implemento de artifícios para corrigir isso, e deixou de ser convexo, necessitando utilizar uma aproximação convexa para resolvê-lo.

#### 4.4.4.2 Problemas de mal condicionamento

Apesar do método da seção anterior ser bastante utilizado, este pode apresentar certos problemas como mal condicionamento, dependência de malha e até mesmo instabilidade numérica; pois, se não estabelecido alguma restrição, sempre será possível encontrar uma topologia artificial e sem aplicação física – como um domínio preenchido por barras tão finas quanto queiramos –, que fornecerá uma rigidez maior para estrutura final.

Por sua vez, o uso de elementos finitos, como impõe uma restrição referente ao tamanho dos elementos malha, apresentarão outro problema de mal condicionamento conhecido como “Tabuleiro de Xadrez”, que consiste na alternância de valores da variável de projeto sem sua convergência e emerge do fato que uma configuração microscópica – na escala da malha – das variáveis de projetos fornecerá respostas semelhantes em uma escala macroscópica. A Figura 16 exhibe essa situação.

Figura 16 – Problema do tabuleiro de xadrez



As figuras são muito semelhantes do ponto de vista macroscópico, inclusive na resposta; porém há variações nas variáveis de projeto que acarretam na não convergência numérica. O processo de otimização, em certo ponto, passa a alternar entre as duas soluções acima, nunca convergindo.

Fonte: Próprio Autor

Para solucionar esse problema são utilizados filtros, que serão explicados na seção seguinte.

#### 4.4.4.3 Filtros

De origem da área de processamento de imagem, os filtros são uma opção bastante viável para resolver os problemas apontados na seção anterior. A aplicação de um filtro imporá implicitamente restrições de *layout* e projeto. Nessa seção, será apresentado um filtro de regularização que torna a função mais suave no domínio. Esse filtro evita a alternância brusca de densidades em elementos próximos, que causam o problema conhecido como tabuleiro de xadrez.

Seja a densidade  $\rho$  de um elemento dada por um mapeamento  $M(x)$ , ou seja:

$$\rho = M(x) \quad , \quad x \in [0,1] \quad (4.4.20)$$

A densidade no ponto de coordenadas  $\mathbf{p}$  será função da variável de projeto  $x$  no domínio, de modo que

$$\rho(\mathbf{p}) = M(x)(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) x(\bar{\mathbf{p}}) d\bar{\mathbf{p}} \quad (4.4.21)$$

Em que  $\varphi$  é uma função filtro suave;  $\Omega$  é o domínio da estrutura;  $\mathbf{p}$  é o vetor referente a posição do ponto analisado na estrutura;  $x$  continua ser a variável do problema, mas não possui mais o significado físico de densidade;  $\rho$  agora será uma função suave e a densidade do problema. Portanto, a equação 4.4.18 é dada agora por:

$$\int_S (\epsilon + (1-\epsilon)\rho_e^q) (\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi})^T \mathbf{D}(\mathbf{B}_3 \boldsymbol{\phi}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (4.4.22)$$

Uma escolha comum para a função de filtro e utilizada por Talischi et al. (2012b), é a função linear “cartola” de raio  $R$ :

$$\varphi(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = c(\mathbf{p}) \max\left(1 - \frac{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|}{R}, 0\right) \quad (4.4.23)$$

em que  $c(\mathbf{p})$  é definido como um coeficiente normalizador de tal forma que

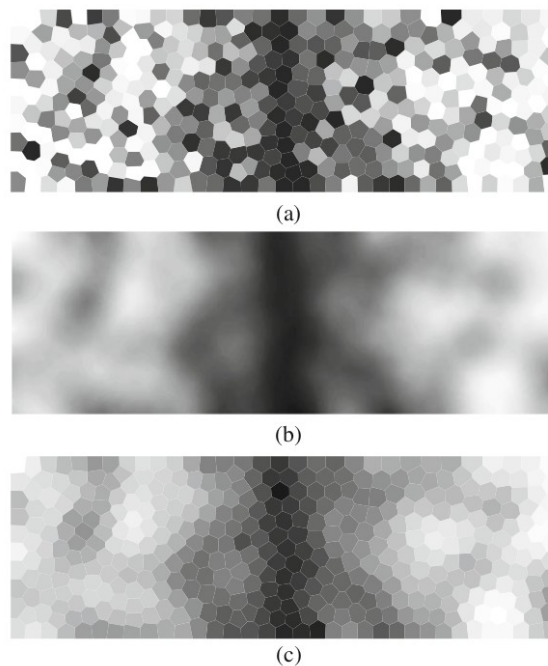
$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) d\bar{\mathbf{p}} = 1 \quad (4.4.24)$$

Sendo assim, para todo  $\mathbf{p} \in \Omega$ ,

$$c(\mathbf{p}) = \left[ \int_{B_r(\mathbf{p}) \cap \omega} 1 - \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{w}|}{R} d\mathbf{w} \right]^{-1} \quad (4.4.25)$$

Vale ressaltar que apesar da variável do problema ainda ser  $x$ , a densidade será  $\rho$ , e esta, além de entrar nas matrizes de rigidez, deve também entrar no cálculo do volume da estrutura otimizada 4.4.19. A Figura 17 mostra o efeito do uso do filtro.

Figura 17 – Efeito da regularização utilizando o filtro da função linear chapéu.



(a) Valores de  $x$  por elemento, (b) função  $\rho$  dependente de  $x$ , (c) Aproximação de  $\tilde{\rho}$  constante por elemento

Fonte: Talischi et al. (2012a)

#### 4.5 Método de Otimização Topológica Híbrida

Como apresentado na seção 3.1, o concreto armado é um material bastante complexo. Sendo assim, existe uma procura por modelos cada vez melhores que descrevam o seu comportamento mecânico adequadamente.

Sendo um material bastante utilizado na engenharia civil, a otimização de estruturas de concreto armado se torna bastante interessante para o seu projeto, propiciando um aumento de rigidez na estrutura otimizada com redução de material.

As duas abordagens comumente utilizadas são o Método da Otimização Topológica Discreta e o Método da Otimização Topológica Contínua.

Conforme comentado anteriormente, no Método de Otimização Topológica Discreta, a malha utilizada é uma treliçada formada por elementos de barra. Este tipo de otimização é a utilizada pelo algoritmo GRAND – que através de uma abordagem plástica resolve o problema de otimização; mas existe, em contrapartida, outros tipos de abordagens, como a elástica. As desvantagens desse método são a dependência do resultado obtido com a malha utilizada e a aproximação do concreto por elementos de barra, que restringe como os caminhos das forças são formados, podendo desprezar alguns que acarretariam em uma rigidez maior da estrutura ótima.

No Método de Otimização Topológica Contínua, é utilizado como base uma malha de elementos finitos bidimensionais ou tridimensionais e algum método de penalização, por exemplo o SIMP. O PolyTop é um exemplo de algoritmo de Otimização Topológica Contínua bidimensional. A desvantagem desse tipo de otimização é a liberdade acrescida por esse método, adquirida pelos elementos de reforço (aço), que pode acarretar estruturas mais difíceis de construir.

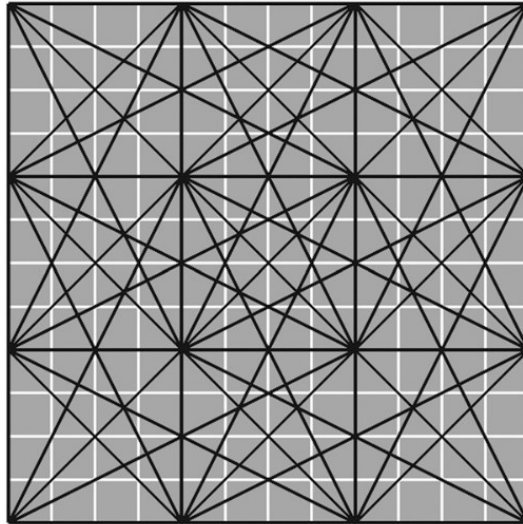
Nesse contexto, Gaynor; Guest; Moen (2013) sugerem uma abordagem, um Método de Otimização Topológica Híbrida para estruturas de concreto armado. Nesse método, o reforço de aço é aproximado por barras de treliça enquanto o concreto é aproximado pelo método contínuo com elementos bidimensionais. Essa nova abordagem híbrida apresenta a vantagem dos dois métodos anteriores e elimina ou minimiza as desvantagens citadas anteriormente.

O modelo de material empregado para o concreto por Gaynor; Guest; Moen (2013) já foi apresentado na seção 4.2. Quanto ao aço, adotaram que ele somente apresenta resistência à tração, para que a estrutura otimizada o apresente apenas nas zonas tracionadas. O módulo de elasticidade longitudinal para o aço foi de 200 GPa para a tração e zero para a compressão.

A malha dos dois tipos de elementos devem ser compatíveis, utilizando os mesmos graus de liberdade. Além disso, é de interesse que os elementos de reforço possuam menor liberdade de forma, melhorando o aspecto construtivo, do que o concreto. Desta maneira, a malha de base utilizada deve ser mais esparsa que a malha de elementos contínuos bidimensionais. A Figura 18 representa a interação

dessas duas malhas, onde observa-se que a malha de base utilizada para a estrutura treliçada é bem mais esparsa que a malha dos elementos contínuos.

Figura 18 – Interação do domínio contínuo e do domínio de treliça.



As linhas pretas são elementos de barras, os retângulos cinzas com contornos brancos são os elementos bidimensionais da malha contínua

Fonte: Gaynor; Guest; Moen, (2013)

Obtido analogamente aos problemas de otimização já apresentados, o problema no final fica da seguinte forma:

$$(P)_{hib} = \begin{cases} \min_{\rho} F^T u(\rho_c, \rho_t, \sigma_c, \sigma_t) \\ s.t. \quad \rho_t l_t + \rho_c a_c - V_{max} \leq 0 \\ \rho_t > 0, 0 \leq \rho_c \leq 1 \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Em que  $\rho_c, \rho_t, a_c, l_t$  são, respectivamente, a densidade dos elementos de contínuos, a área da seção transversal das barras da treliça – chamada de densidade das barras –, a área dos elementos contínuos e o comprimento das barras da treliça. O problema é resolvido para um domínio com espessura unitária. E o vetor  $u$  é fornecido implicitamente por

$$K(\rho_c, \rho_t, \sigma_c, \sigma_t)u = F \quad (4.5.2)$$

em que

$$K(\rho_c, \rho_t, \sigma_c, \sigma_t) = K_c(\rho_c, \sigma_c) + K_t(\rho_t, \sigma_t) \quad (4.5.3)$$

Sendo  $K_c$  a matriz de rigidez global para elementos bidimensionais apresentada na seção 4.2 e  $K_t$  a matriz de rigidez global para elementos de treliça,

apresentada na seção 4.1, ambas adaptadas para o problema de Otimização Topológica.

Observa-se que o problema referido na Equação 4.5.2 é não linear, sendo necessário o uso de métodos iterativos para sua solução, demonstrando, portanto, um possível problema que será o aumento do tempo de processamento computacional. Os critérios de parada do sistema não linear adotado por Gaynor; Guest; Moen, (2013) foram de 0,01% de mudança entre tensão de compressão e tração nos elementos de treliça e mudança de 0,01 no ângulo  $\theta$  apresentado na Equação 4.2.4 na seção 4.2.

## 5 METODOLOGIA

Pretende-se demonstrar que a metodologia de Gaynor; Guest; Moen, (2013) pode ser inserida em um algoritmo de otimização existente que utiliza elementos poligonais convexos. Estimou-se que, implementando essa metodologia com a base do PolyTop – utilizando o PolyToppy –, originar-se-ia um novo algoritmo versátil e que facilitaria a aplicação em geometrias mais complexas; pois pode ser utilizado elementos finitos poligonais, que, além de serem mais precisos, são mais adaptáveis a geometrias mais complexas. Como já dito anteriormente, o PolyMesher, o PolyTop e o GRAND foram implementados em python herdando o nome dos algoritmos originais e acrescentando py ao final. Além disso, com base nos algoritmos gerados foi elaborado um novo algoritmo o HybridToppy que resolve problemas de otimização de estruturas planas de concreto armado utilizando elementos finitos poligonais convexos e a metodologia híbrida.

A eficácia do novo algoritmo proposto foi testada através de comparações com resultados disponíveis na literatura e resultados obtidos pelo uso dos algoritmos PolyToppy e GRANDpy. Ressalta-se que nesse trabalho somente foi desenvolvida a otimização topológica que pode ser utilizada para desenvolver os Modelos de Bielas e Tirantes finais, os quais, porém, necessitam de um tratamento maior e uma análise referente a praticidade do modelo.

### 5.1 Procedimentos

Primeiramente, desenvolve-se a malha híbrida do problema. Para esse procedimento, utilizou-se o PolyMesherpy e parte do GRANDpy responsável pela geração da malha de treliça.

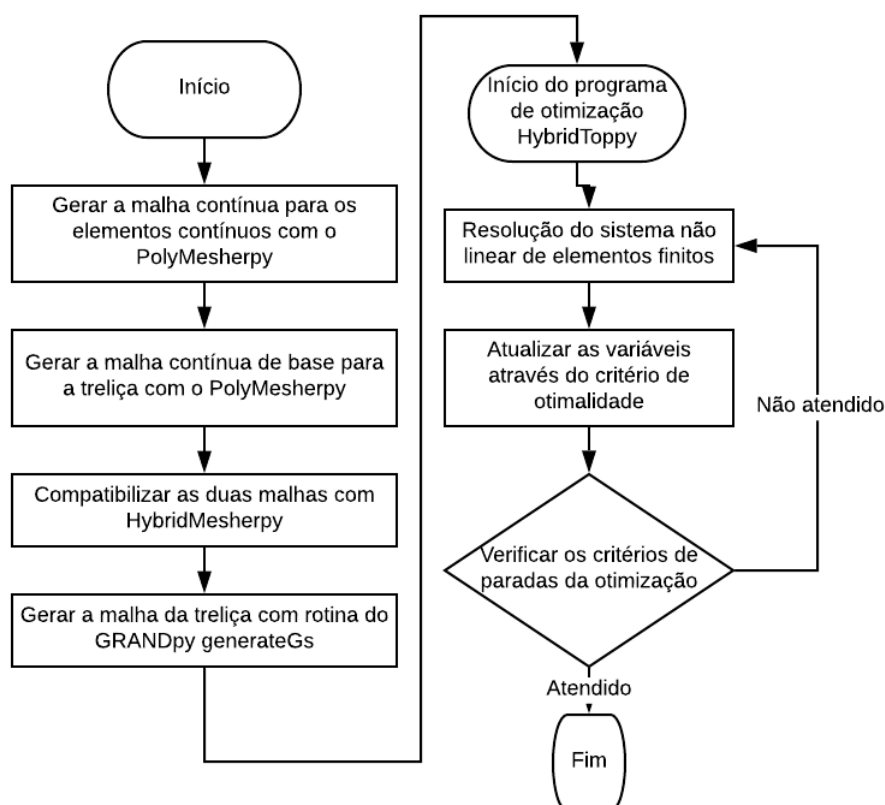
A próxima etapa foi desenvolvida com base no algoritmo PolyToppy que executa uma análise de material linear e, portanto, foi necessário modificá-lo para considerar a não linearidade do material, diminuindo, dentro do possível, o acréscimo inerente de custo computacional.

Com o sistema não linear resolvido, através do uso da metodologia do critério de otimalidade, utilizado pelo PolyToppy, as variáveis são atualizadas. Verifica-se os critérios de parada e convergência, repetindo os dois últimos



processos citados até que esses critérios sejam atendidos. A Figura 19 demonstra, através de um diagrama, um resumo de como foi desenvolvido o novo algoritmo.

Figura 19 – Resumo metodologia adotada para a resolução do problema



Fonte: Próprio autor

As próximas seções explicarão mais detalhadamente cada parcela do algoritmo, as considerações e modificações feitas.

#### 5.1.1 Malha Híbrida

Inicialmente deve-se determinar o nível de discretização da malha contínua (malha 1) e da malha de base usada para desenvolver a estrutura treliçada (malha 2). Para que o objetivo desse novo algoritmo seja alcançado, indica-se que a malha 2 seja mais esparsa que a 1, como mostra a Figura 18. Através do PolyMesherpy, as duas malhas são obtidas; mas não são necessariamente compatíveis, pois, devido ao caráter aleatório da geração de malhas, os nós de uma malha não correspondem necessariamente aos nós da outra malha. Sendo assim é utilizado o algoritmo HybridMesherpy para compatibilizar as duas malhas fazendo os nós da malha 2

colapsarem para os nós mais próximos da 1. Com malha 1 é bem mais refinada que a 2, as distorções não serão relevantes ao ponto de desconfigurar a estrutura da treliça que será construída a partir da malha 2 compatibilizada, utilizando uma rotina do algoritmo GRANDpy denominada de GenerateGS.

### 5.1.2 Problemas observados na geração de malha

Em alguns exemplos foi detectado um problema referente a geração de malha. O PolyMesher, e por consequência o PolyMesherpy, foi elaborado para ter um desempenho adequado quando a quantidade de elementos da malha é relativamente considerável. A presença de cantos e orifícios internos gerou problemas para a obtenção de uma malha de base adequada para a geração da Ground Structure, pois essa malha é mais esparsa. Aumentar a quantidade de elementos pode aparentar ser uma solução, porém deve-se levar em conta duas situações: o aumento no número de elementos aumenta a liberdade da Ground Structure indo de encontro ao objetivo da proposta da metodologia; o aumento da quantidade de elementos da malha de base aumenta muito mais que proporcionalmente a quantidade de elementos gerados na Ground Structure acarretando em um aumento considerável de variáveis e portanto de tempo computacional.

A solução foi uso de malhas de base regulares para a geração da Ground Structure em alguns exemplos. Para isso basta apenas inserir sementes iniciais onde se localiza os centroides do elemento regular correspondente e executar uma interação apenas no PolyMesherpy.

### 5.1.3 Resolução do sistema de equilíbrio não-linear

Como visto anteriormente o sistema de equilíbrio, expresso por  $Ku = F$ , não é mais linear, necessitando resolvê-lo de forma iterativa. Um processo de resolução desse sistema foi resumido por Gaynor; Guest; Moen, (2013) que segue a lógica do Método do Ponto Fixo, porém neste trabalho optou-se por um forma um pouco diferente. Notou-se que a metodologia apresentada por esses autores às vezes, no algoritmo aqui desenvolvido de elementos poligonais, gerava alguns problemas de convergência devido a mudanças mínimas em torno de um valor de tensão dos elementos que poderia ser considerado nulo. Isso ocasionava uma mudança contínua do módulo de elasticidade dos materiais demorando

demasiadamente para atingir o critério de parada ou nunca o alcançando. Nota-se que tais elementos são desprezíveis para o resultado final, afinal a tensão neles são, do ponto de vista numérico, nulas. O procedimento adotado neste trabalho será descrito a seguir.

Na primeira iteração do programa calcula-se, ainda fora da rotina da análise não linear, todas as matrizes de rigidez locais dos elementos de treliça para um valor unitário de módulo de elasticidade salvando-as na memória. Inicia-se também as variáveis referentes as tensões iniciais e os ângulos  $\theta$  das direções principais do meio contínuo adotando-se o valor zero em todas essas. Cria-se um vetor que indica se determinada barra está tracionada ou comprimida, possuindo na posição equivalente a barra o valor um ou zero respectivamente. Esse vetor é iniciado admitindo-se que todas as barras estão tracionadas. Um vetor de deslocamento também é iniciado com o valor nulo. Essa etapa somente será executada apenas uma vez durante toda execução do programa.

Ainda antes da *rotina* da análise não linear são iniciadas duas variáveis que servirão de controle da convergência, a variável erro, iniciada com um valor arbitrariamente alto, e uma variável condição, iniciada com o valor um. A *rotina* iniciará e continuará enquanto a variável condição possuir o valor um e seguirá a seguinte sequência lógica:

- a) Calcula-se as matrizes de rigidez locais,  $K_c(\sigma_p, \theta)$ , de todos os elementos bidimensionais utilizando o que foi exposto em 4.1.2.3 e 4.2. Foi estabelecida para o módulo de elasticidade longitudinal do concreto uma função  $E_c$  que possui valor 1 se  $\sigma \leq 0$  e valor 0,1 se  $\sigma > 0$  (Observe que no primeiro *ciclo* o modulo de elasticidade será 1 nas duas direções).
- b) Monta-se a matriz de rigidez global dos elementos bidimensionais. Para isso multiplica-se adequadamente as matrizes locais dos elementos de concreto pela função densidade e as aloca em uma matriz esparsa.
- c) Monta-se a matriz de rigidez global dos elementos unidimensionais. Para isso multiplica-se adequadamente as matrizes locais pela função densidade; que, no caso, representa a área da seção transversal da barra; pelo valor correspondente do módulo de elasticidade longitudinal do aço – adotado igual a 10 –, e pelo valor correspondente do vetor que indica se a barra está

tracionada ou comprimida – 1 ou zero, respectivamente – alocando-as em uma matriz esparsa.

- d) Soma-se as duas matrizes globais.
- e) Resolve-se o sistema  $Ku = F$
- f) Verifica-se o seguinte critério de parada:

$$\frac{\sum_{j=1}^n |u_j^i - u_j^{i-1}|}{n} < tol \quad (5.1.1)$$

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^n |u_j^i|}{n} \right)$$

Em que  $n$  é a quantidade de graus de liberdade da estrutura,  $tol$  é um fator de redução e  $i$  se refere ao número da iteração analisada.

A Equação 5.1.1 é equivalente a seguinte condição: se a média dos valores absolutos das diferenças entre o deslocamento obtido na iteração atual e o deslocamento da iteração anterior – considera-se zero na primeira iteração – for menor que a média dos valores absolutos dos deslocamentos multiplicados por um fator de redução –  $tol$  – dado como tolerância, a condição será atendida e o ciclo terminado com a solução  $u$  obtida, senão, a iteração continuará.

- g) Calcula-se as tensões atuantes em todos os elementos.
- h) Salva-se essas tensões e se retorna ao passo I com as novas tensões obtidas.

As tensões e os ângulos obtidos após a convergência são mantidos e serão utilizados como estimativa inicial na próxima iteração não linear. Como a configuração da estrutura não muda bruscamente a cada iteração de otimização, obtém-se uma melhora na agilidade do programa.

#### 5.1.4 Atualização das variáveis

A otimização será feita através do critério de otimalidade e o método da bisseção, como exposto na seção 4.3.10, pois o algoritmo PolyTop originalmente trabalha com esse método. Ainda assim, deve-se adaptar para incluir as novas variáveis referentes as barras da estrutura de treliça. As mudanças necessárias são mínimas, pois a estrutura do problema permanece a mesma. Necessita-se apenas

desenvolver um vetor concatenado com as variáveis de projeto dos elementos contínuos e as variáveis de projeto das barras da treliça.

## 5.2 Acelerador do processo do Método de Elementos Finitos não linear

Anteriormente foi apresentado de forma simples o procedimento básico do programa. Executando-o foi observado que ocorreu um aumento considerável no tempo processamento do programa devido à não linearidade material, principalmente devido à necessidade de recalcular as matrizes de rigidez dos elementos contínuos. Também foi observado que, para um fator de tolerância de 0,5%, após certa iteração de otimização e para cada valor de penalização, o número de iterações de não-linearidade reduziu para 1. Isso ocorre, pois a partir de certa iteração a otimização não muda a configuração da estrutura significativamente a cada passo.

Definindo  $K^i$  como a matriz de rigidez dos elementos contínuos na iteração de otimização  $i$  se tem

$$K^i := \sum_{e=1}^n K_e^{*i}(\sigma_e^i) \rho_e^i \quad (5.2.1)$$

Sendo:

$K_e^{*i}$  é a matriz de rigidez unitária, considerando a densidade com valor unitário, de um elemento  $e$  na iteração  $i$ ;

$\rho_e^i$  é a densidade/área do elemento  $e$  na iteração  $i$ ;

Por sua vez, as tensões  $\sigma$  no elemento é dependente de  $u$  que por sua vez é dependente da distribuição de densidade. No entanto, após certa quantidade de iterações de otimização, como a configuração da estrutura não muda consideravelmente entre uma iteração e outra, para uma quantidade pequena de passos, a natureza das tensões, tração ou compressão, permanece praticamente a mesma e o ângulo  $\theta$ , referente às direções principais de tensões, é pouco alterado. Portanto, para uma pequena quantidade  $p$  de passos, a variação de  $K_e^*$  é pequena, ou seja,

$$K_e^{*i} \approx K_e^{*(i+p)} \quad (5.2.2)$$

Portanto, as matrizes  $K_e^*$  podem ser tomadas como constantes por algumas iterações de otimização. Desta forma, a montagem da matriz de rigidez

unitária, que é um processo computacional custoso, pode ser feita somente a cada número determinado de iterações, e as matrizes  $K_e$  somente serem atualizadas pela densidade, calculada na iteração de otimização anterior. Sendo assim,

$$K^{(i+p)} := \sum_{e=1}^n K_e^{*i}(\sigma_e^i) \rho_e^{(i+p)} \quad (5.2.3)$$

Este método foi implementado de modo que o usuário possa escolher manualmente: quantas iterações serão necessárias para a estrutura se estabilizar e, somente após, aplicar o procedimento descrito acima; e a quantidade de iterações em seguida para a qual não serão calculadas as matrizes de rigidez dos elementos contínuos. Para os valores adotados, 10 e 5 respectivamente, foi observada uma diminuição significativa do tempo computacional sem prejuízo de convergência ou desvio de resultado.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

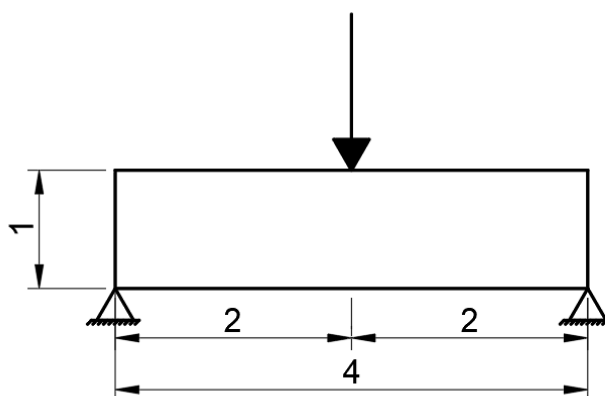
Serão avaliados diversos exemplos comuns da literatura com o intuito de validar a metodologia e comparar os resultados obtidos com os resultados encontrados por outras metodologias. Assim, serão utilizados os algoritmos Polytoppy e GRANDpy, que resolvem problemas de otimização com os Método de Otimização Topológica Contínua e Método de Otimização Topológica Discreta respectivamente, e, quando possível, os resultados obtidos por Gaynor; Guest; Moen, (2013), que, apesar de não haver garantia de correspondência exata de alguns dados de entrada, a aproximação visual é possível. Em seção separada para cada exemplo, os resultados serão comparados e discutidos.

No resultado do GRAND, as barras alternam de tamanho, possuindo maior diâmetro quanto mais solicitada, e cor de acordo, e uma escala de azul a vermelho de acordo com a solicitação. No PolyToppy a topologia final é representada pela parte escura da figura. Por sua vez, no resultado no HybridToppy, a parte preta representa o concreto enquanto que as barras, que representam o reforço de aço, mudam de cor e diâmetro de acordo com a solicitação das mesmas, apresentando ao lado uma barra de cor normatizada em relação a área da barra mais tracionada.

### 6.1 Domínio Viga Biapoiada

Este domínio consiste em uma viga biapoiada de 4 metros de comprimento e 1 metro de altura com uma carga concentrada no centro. A Figura 20 a representa.

Figura 20 – Domínio Viga Biapoiada

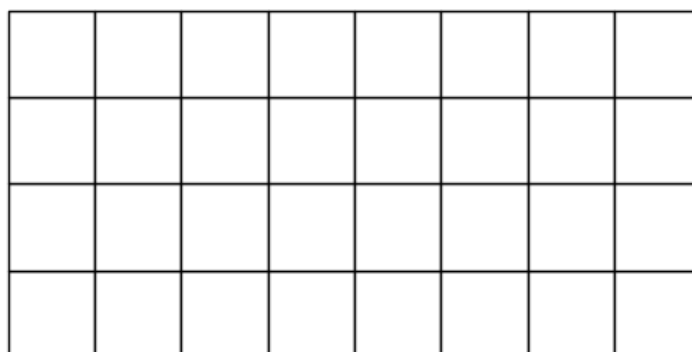


Fonte: Próprio autor

O problema é simétrico, portanto pode-se diminuir o tempo computacional utilizando essa propriedade.

#### 6.1.1 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo GRANDpy

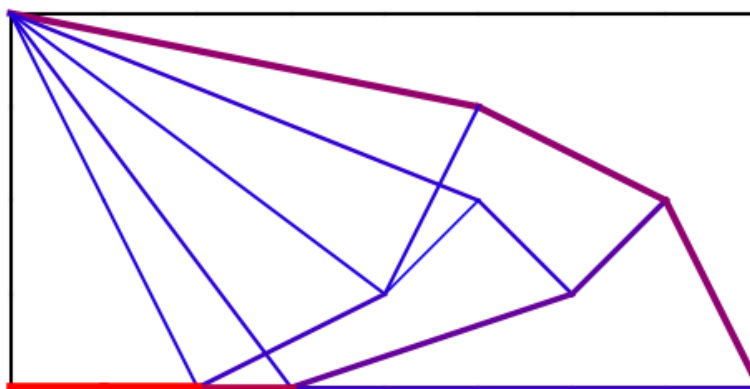
A malha base utilizada para gera a Ground Structure, observando o eixo de simetria, é representada pela Figura 21. O resultado é representado pela Figura 22.



Fonte: Próprio autor

Figura 21 – Malha de elementos regulares do Domínio Viga Biapoiada

Figura 22 – Resultado do Domínio Viga Biapoiada no GRANDpy



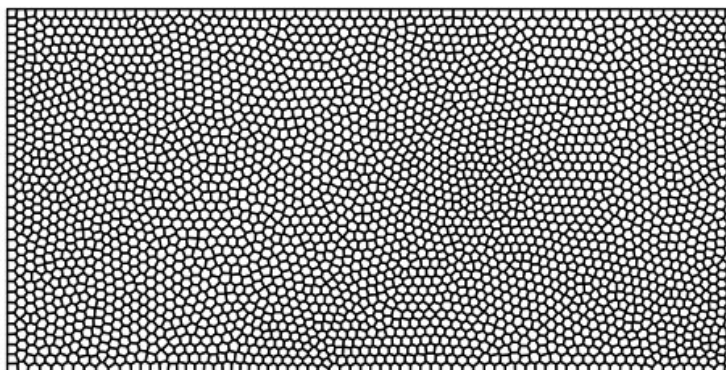
Fonte: Próprio autor



### 6.1.2 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo PolyToppy

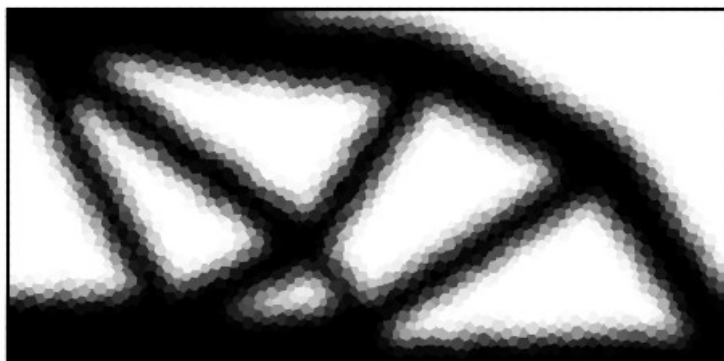
A restrição de volume foi 50% do volume inicial. A malha usada é representada pela Figura 23 e o resultado fornecido pelo PolyToppy é apresentado pela Figura 24.

Figura 23 – Malha fina do Domínio Viga Biapoiada



Fonte: Próprio autor

Figura 24 – Resultado do Domínio Viga Biapoiada no PolyToppy

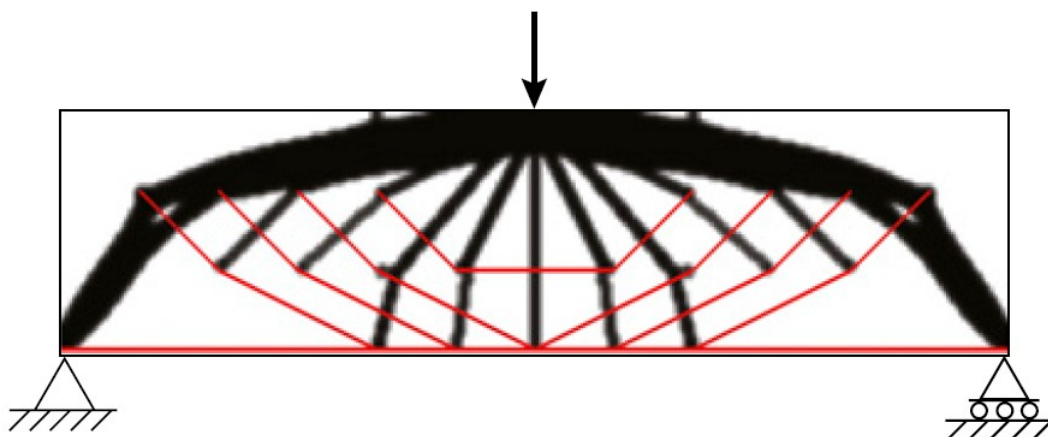


Fonte: Próprio autor

### 6.1.3 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013)

O resultado obtido por Gaynor; Guest; Moen, (2013) – para a viga inteira, ou seja, não utilizando um eixo de simetria – é demonstrado pela Figura 25. A parte em preto refere-se ao concreto comprimido enquanto que as barras vermelhas referem-se aos elementos de aço.

Figura 25 – Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013)



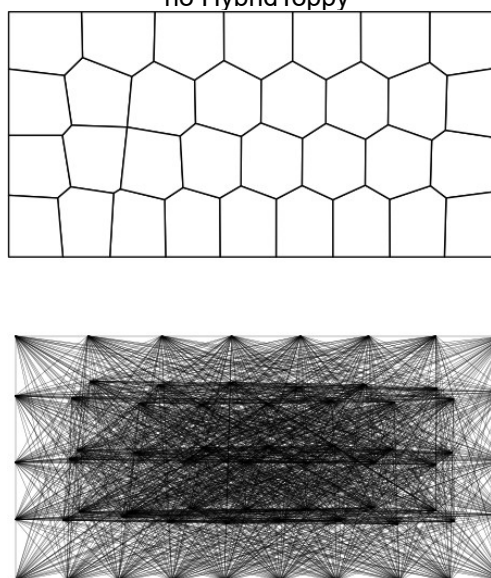
Fonte: Gaynor; Guest; Moen, (2013)

#### 6.1.4 Resultado do Domínio Viga Biapoiada fornecido pelo HybridTopy

##### 6.1.4.1 Resultado do Domínio Viga Biapoiada pelo HybridTopy utilizando malhas poligonais

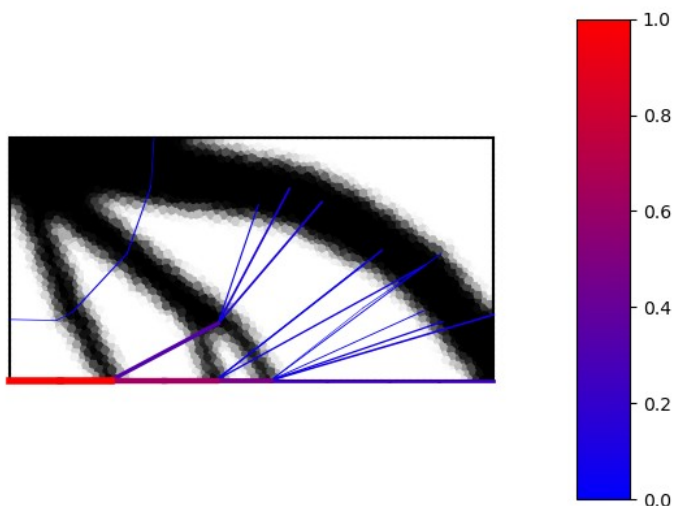
A malha para os elementos contínuos foi a mesma utilizada no PolyTopy, Figura 23, A Figura 26 apresenta malha de base para a geração da estrutura treliçada e esta última. A restrição de volume foi de 50% e o resultado obtido para essa estrutura é apresentado pela Figura 27.

Figura 26 – Malha de base regular e Ground Structure correspondente do Domínio Viga Biapoiada no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Resultado do Domínio Viga Biapoiada no HybridTopypy utilizando malha de base poligonal

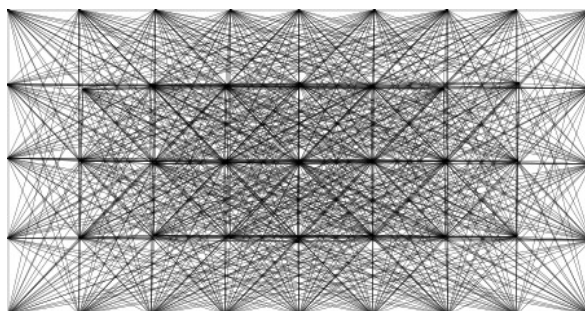


Fonte: Próprio autor

#### 6.1.4.2 Resultado do Domínio Viga Biapoiada pelo HybridTopypy utilizando malha de base regular

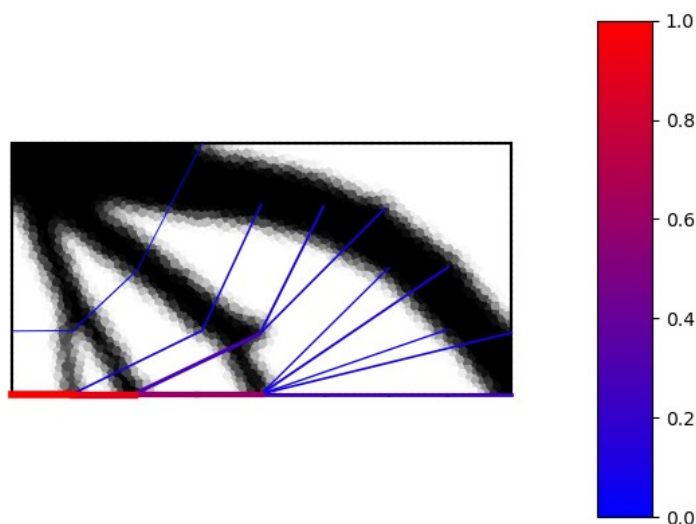
A malha de base para a geração da Ground Structure, Figura 28, foi a mesma que a usada no GRANDpy, Figura 21, e a malha dos elementos contínuos foi a mesma do Polytoppy, Figura 23. A restrição de Volume adotada também foi de 50% do volume inicial e o resultado obtido para essa estrutura é exibido pela Figura 29.

Figura 28 – Ground Structure utilizando malha regular do Domínio Viga Biapoiada no HybridTopypy



Fonte: Próprio autor

Figura 29 – Resultado do Domínio Viga Biapoiada no HybridTopypy utilizando malha de base regular



Fonte: Próprio autor

#### 6.1.5 Comparação dos resultados obtidos na Viga Biapoiada

Nota-se que o GRANDpy não fornece como dado de saída a natureza da tensão sendo necessário um pós-processamento, que não é algo dificultoso nem mesmo relevante quanto ao tempo computacional caso se almeje fazer. Apesar disso, abstraindo maiores formalidades e utilizando o bom senso aliado a conhecimentos estruturais, pode-se estimar que na zona inferior encontra-se a zona de tração longitudinal, as bielas de compressão partem do ponto de aplicação da carga para baixo e as demais linhas/curvas estão tracionadas funcionando como armaduras transversais.

Assim como o GRANDpy, o PolyTopypy não fornece o tipo de tensão presente nos elementos da estrutura final obtida, porém o pós-processamento não é tão direto quanto na otimização de elementos de treliça, pois os elementos agora são bidimensionais. Nota-se também que o resultado segue o mesmo padrão do obtido pelo GRAND. Há uma zona superior de compressão, uma inferior de tração e elementos transversais de compressão e tração.

O resultado de Gaynor; Guest; Moen (2013) se assemelha aos resultados exibidos anteriormente, confirmando as predições feitas com relação a natureza das

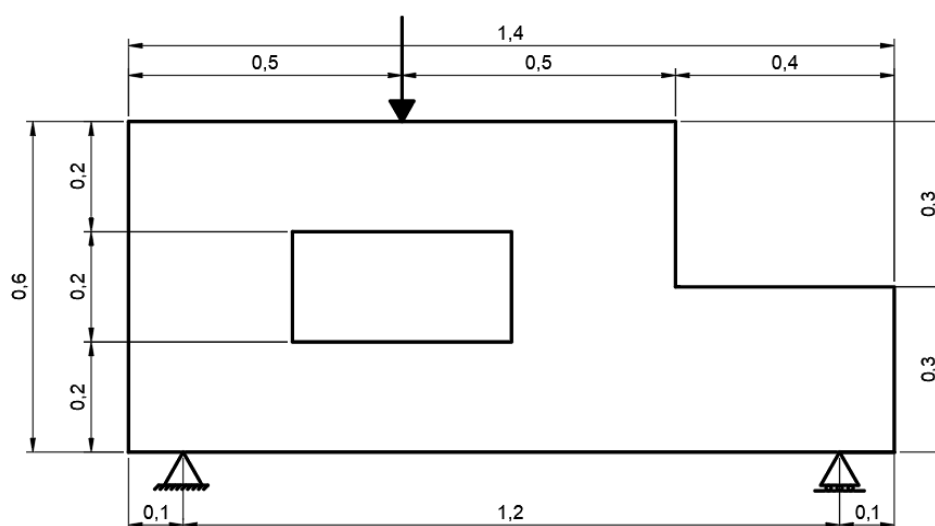
tensões, compressão ou tração, nos elementos. O resultado exibido é esperado de uma viga biapoiada com carga no centro.

O HybridTopypy fornece resultados que também se aproximam dos demais resultados se assemelhando bastante com o resultado de Gaynor; Guest; Moen, (2013). Observou-se também que, para o exemplo em questão, não houve uma mudança significativa do resultado devido a tipo de malha usada, regular retangular ou poligonal.

## 6.2 Domínio em forma de L

O Domínio em forma de L é um exemplo bastante utilizado na otimização topológica e é apresentado pela Figura 30.

Figura 30 – Domínio em forma de L

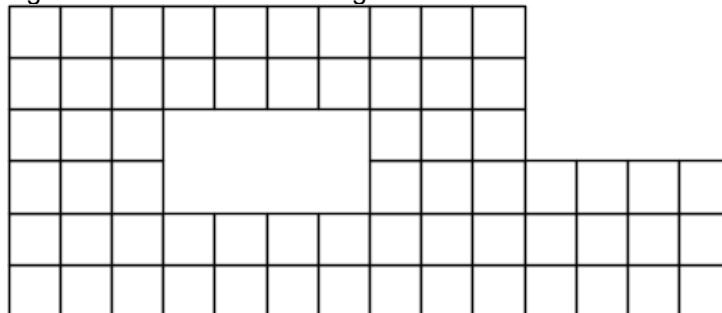


Fonte: Próprio autor

### 6.2.1 Resultado do Domínio em forma de L fornecido pelo GRANDpy

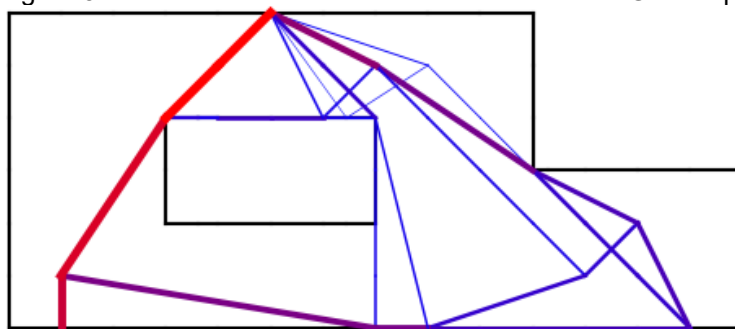
A malha de base utilizada para gerar a Ground Structure é exposta pela Figura 31 e o resultado fornecido pelo GRANDpy é demonstrado pela .

Figura 31 – Malha de base regular do Domínio em forma de L



Fonte: Próprio autor

Figura 32 – Resultado do Domínio em forma de L no GRANDpy

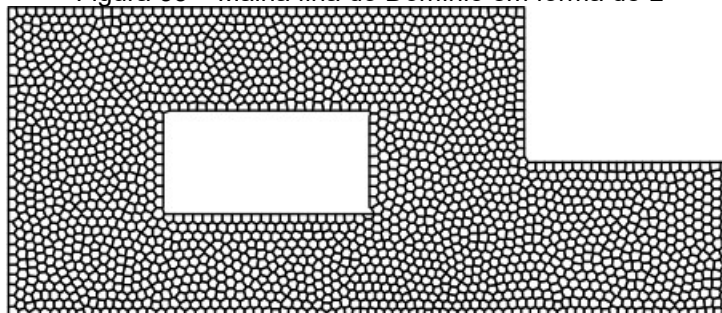


Fonte: Próprio autor

### 6.2.2 Resultado do fornecido pelo PolyTopsy

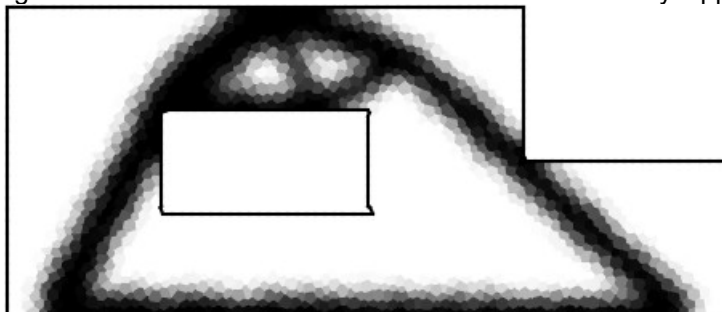
A malha utilizada é apresentada pela Figura 33. A restrição de volume foi 30% do volume inicial e o resultado fornecido pelo PolyTopsy é exposto pela Figura 34.

Figura 33 – Malha fina do Domínio em forma de L



Fonte: Próprio autor

Figura 34 – Resultado do Domínio em forma de L no PolyTopy

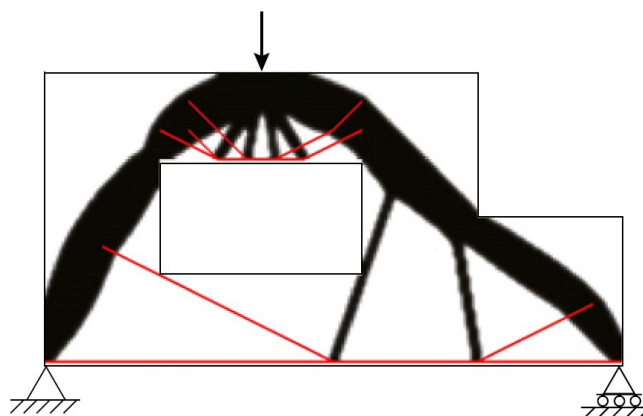


Fonte: Próprio autor

### 6.2.3 Resultado do fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013)

O resultado obtido por Gaynor; Guest; Moen, (2013) é demonstrado pela Figura 35. Relembrando, a parte em preto refere-se ao concreto comprimido enquanto que as barras vermelhas referem-se aos elementos de aço.

Figura 35 – Resultado do Domínio em forma de L por Gaynor; Guest; Moen, (2013)

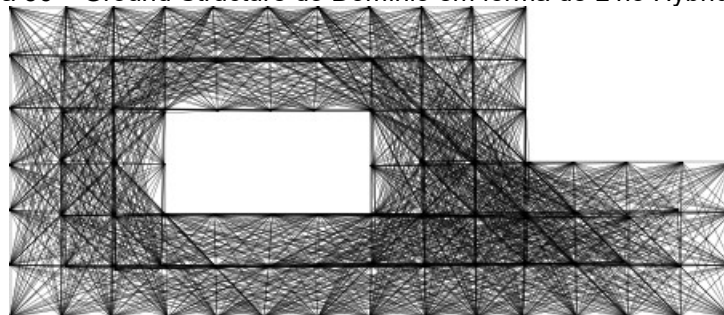


Fonte: Gaynor; Guest; Moen, (2013)

#### 6.2.4 Resultado do fornecido pelo HybridTopyy

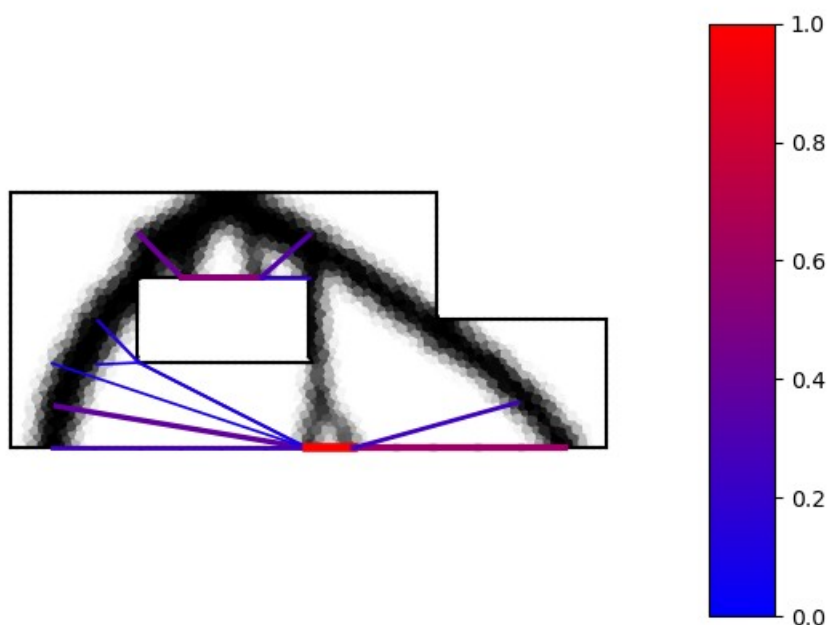
A malha contínua utilizada foi a mesma do PolyTopyy, Figura 33 e A malha base para a elaboração da Ground Structure, Figura 36, foi a mesma que a utilizada no Grandpy, Figura 31. A restrição de volume foi de 30% do volume inicial e o resultado é exibido pela Figura 37.

Figura 36 – Ground Structure do Domínio em forma de L no HybridTopyy



Fonte: Próprio autor

Figura 37 – Resultado do Domínio em Forma de L no HybridTopyy



Fonte: Próprio autor



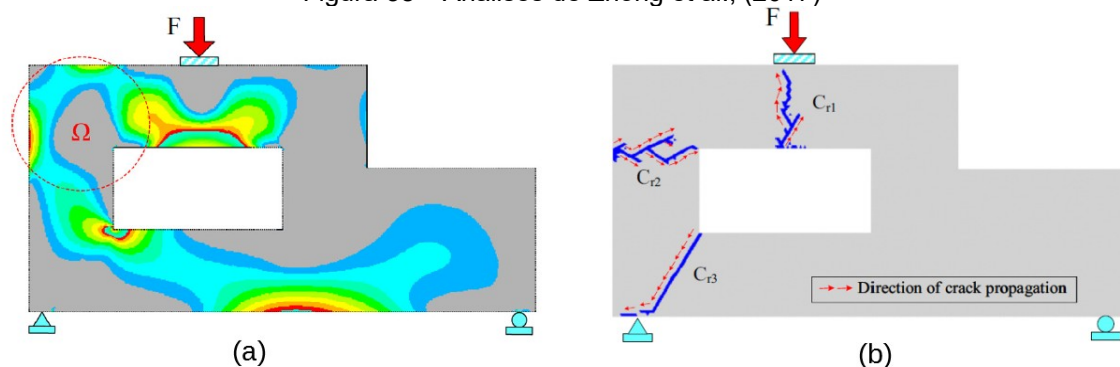
### 6.2.5 Comparação de resultados do Domínio em Forma de L

O resultado obtido pelo HybridTopy se assemelham dos resultados de Gaynor; Guest; Moen, (2013). A restrição de volume provavelmente não foi igual. Entretanto, um comparativo é válido, pois se espera um comportamento mecânico semelhante mesmo com diferenças mínimas. Observa-se a necessidade de uma zona de reforço de armadura longitudinal acima do orifício retangular presente na estrutura. Além disso percebe-se uma necessidade de reforço de aço na zona inferior da estrutura.

Tanto o GRANDpy quanto o PolyTopy apresentaram resultados semelhantes ao do HybridTopy apresentando zonas de reforço acima do orifício e na zona inferior da estrutura, e bielas de compressão semelhantes.

Zhong et al., (2017) em seu trabalho – citado na seção 3.3 – fez uma análise mais detalhada desse domínio, inclusive citou os resultados obtidos por Gaynor; Guest; Moen, (2013). Recapitulando, em seu trabalho foi ressaltado a importância de uma Análise Primária, em que o Modelo de Bielas e Tirantes deve corresponder com o resultado da análise linear de tensão, e uma Análise Posterior, em que se avalia a correspondência do reforço com a região de fissuras no concreto, obtidas com o uso de simulação. A Figura 38 apresenta as regiões principais de tração do domínio e o resultado de simulação de fissuras obtido através de um modelo numérico com base na distribuição de Weibull, ambos elaborados por Zhong et al. (2017). Eles chegaram a conclusão que há uma região no limite esquerdo do domínio em que essas análises apontam uma necessidade de um reforço não apresentada pela metodologia híbrida. Sendo assim, Zhong et al., (2017) elaboraram seu próprio modelo de bielas e tirantes que é exibido pela Figura 39.

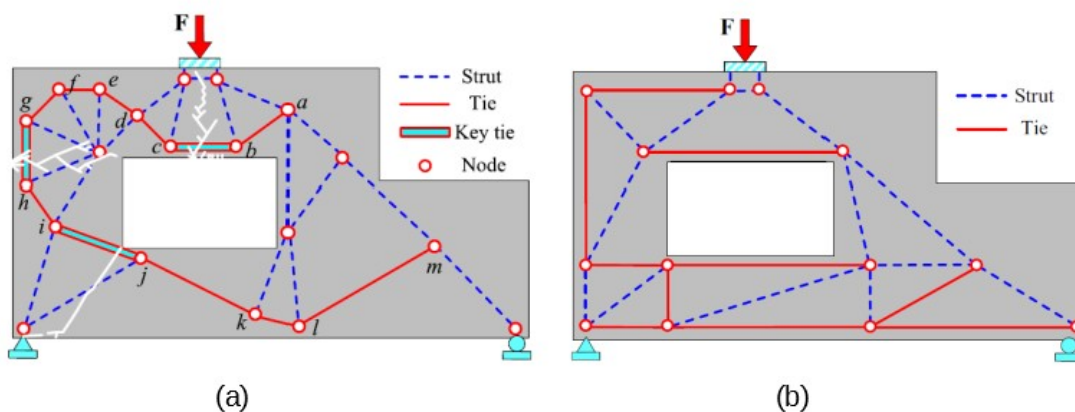
Figura 38 – Análises de Zhong et al., (2017)



(a) Regiões principais de tração no domínio; (b) Regiões de fissuras do domínio

Fonte: Adaptado de Zhong et al., (2017)

Figura 39 – Modelo de Bielas e Tirantes do Domínio em Forma de L por Zhong et al., (2017)



a) Modelo de Bielas e Tirantes obtido; (b) Simplificação do modelo obtido

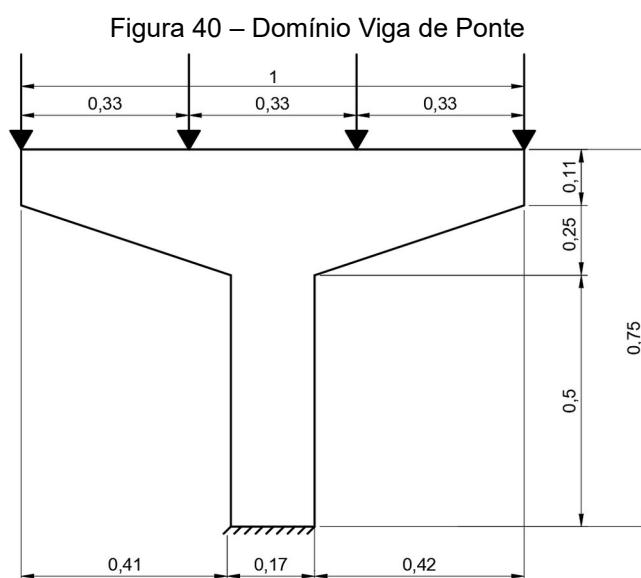
Fonte: Adaptado de Zhong et al., (2017)

Uma justificativa para essa possível diferença é apresentada por Bruggi, (2009). Ele ressaltou precauções que devem ser tomadas para garantir a validade do Modelo de Bielas e Tirantes obtido pelos métodos de otimização. Em seu trabalho, foi observado que, o MBT resultante de sua metodologia, necessitava de reforço adicional que propiciasse a ductilidade suficiente para permitir o uso da teoria do limite inferior da plasticidade. Os modelos de otimização aqui adotados não apresenta uma restrição a deformação permitindo, teoricamente, o surgimento de regiões com deformação e, por consequência, fissuração excessiva, localizadas onde o concreto não contribui para a rigidez final do MBT. Tais regiões se existentes devem ser reforçadas com aço para assegurar, com segurança razoável, o

funcionamento adequado da estrutura respeitando os critérios de ductilidade e as exigências do estado limite de utilização.

### 6.3 Domínio Viga de Ponte

O Domínio Viga de Ponte, representado pela Figura 40, é um domínio genérico que assemelha a seções transversais utilizadas em pontes. Como no Domínio Viga Biapoiada, é possível aproveitar a simetria da estrutura de forma a economizar tempo computacional.

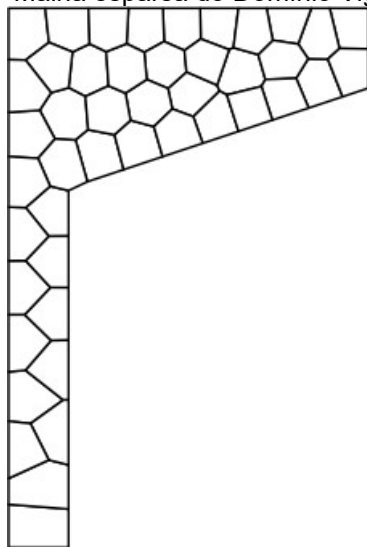


Fonte: Próprio autor

#### 6.3.1 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo GRANDpy

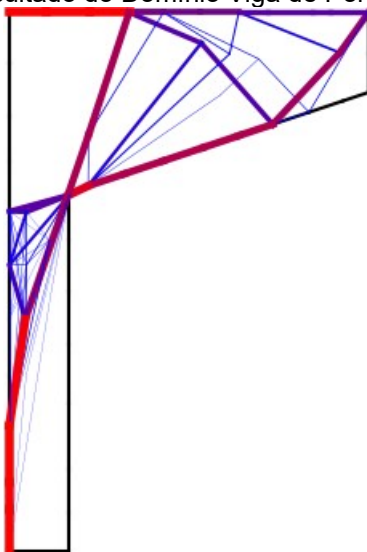
Para esse programa optou-se por utilizar a malha representada pela Figura 41 e o resultado fornecido pelo GRANDpy é exibido pela Figura 42.

Figura 41 – Malha esparsa do Domínio Viga de Ponte



Fonte: Próprio autor

Figura 42 – Resultado do Domínio Viga de Ponte no GRANDpy

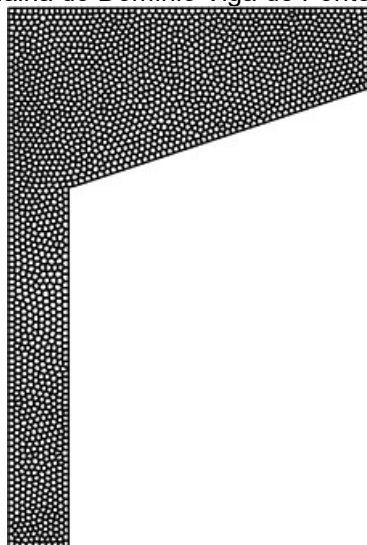


Fonte: Próprio autor

### 6.3.2 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo PolyToppo

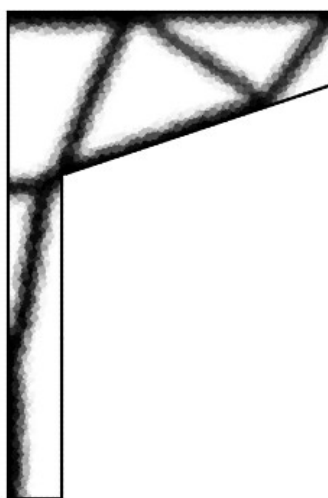
A restrição de volume foi 30% do volume inicial. A malha utilizada no PolyToppo é apresentada pela Figura 43 e o PolyToppo forneceu o resultado exposto pela Figura 44.

Figura 43 – Malha do Domínio Viga de Ponte no PolyToppy



Fonte: Próprio autor

Figura 44 – Resultado do Domínio Viga de Ponte no PolyToppy

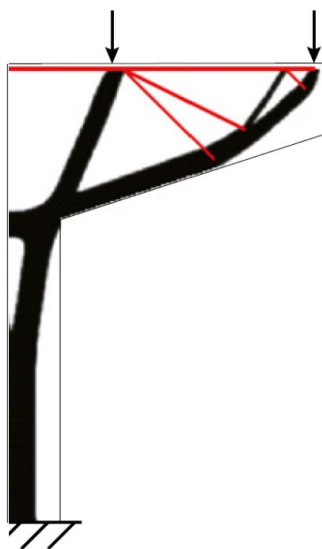


Fonte: Próprio autor

### 6.3.3 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido por Gaynor; Guest; Moen, (2013)

O resultado obtido por Gaynor; Guest; Moen, (2013) é demonstrado pela Figura 45.

Figura 45 – Resultado de Gaynor; Guest; Moen (2013) do Domínio Viga de Ponte



Adaptado de Gaynor; Guest; Moen (2013)

#### 6.3.4 Resultado do Domínio Viga de Ponte fornecido pelo HybridTopyy

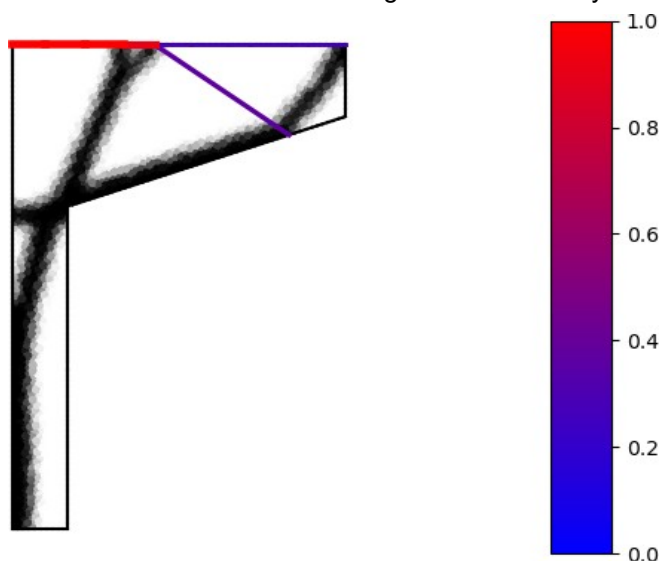
A malha de base utilizada para a geração da Ground Structure, Figura 46, foi a mesa malha do Grandpy, Figura 41, e a malha contínua foi a mesma utilizada no PolyTopyy, Figura 43. A restrição de volume adotada foi de 30% do volume inicial e o resultado obtido é apresentado pela Figura 47.

Figura 46 – Malha de base e Ground Structure do Domínio Viga de Ponte no HybridTopyy



Fonte: Próprio autor

Figura 47 – Resultado do Domínio Viga de Ponte no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

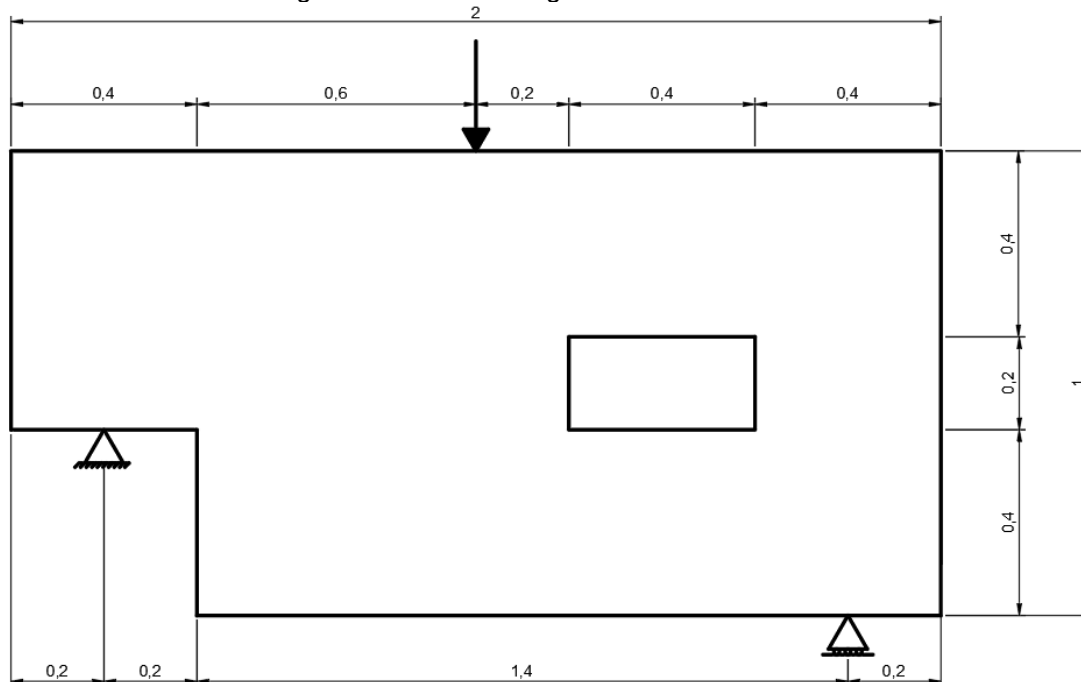
### 6.3.5 Comparação de resultados do Domínio Viga de Ponte

Nota-se a necessidade de reforço de armadura na zona superior da estrutura. Na zona inferior, a estrutura está submetida a compressão somente, o que intuitivamente era esperado. Observa-se uma grande semelhança entre os resultados obtidos em todas as metodologias, mas nota-se que o GRANDpy fornece um resultado que necessita de um tratamento maior para ser usado. O resultado do HybridTopy e o PolyTopy foram bastante semelhante e, dependendo da simplificação adotada, o Modelo de Bielas e Tirantes final das duas metodologias pode ser praticamente o mesmo.

## 6.4 Domínio Viga Parede com Orifício

O domínio Viga Parede com Orifício é representado pela Figura 48 logo abaixo.

Figura 48 – Domínio Viga Parede com Orifício

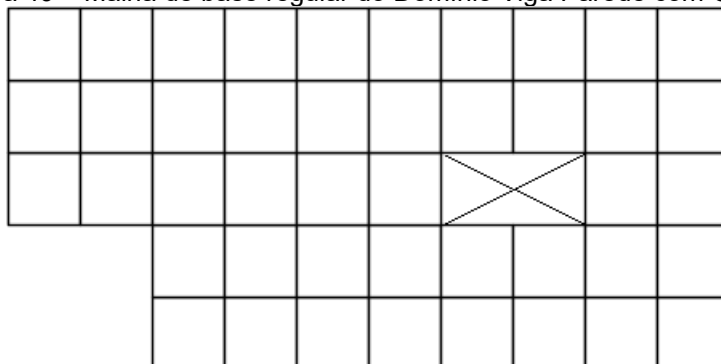


Fonte: Próprio autor

#### 6.4.1 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo GRANDpy

A malha utilizada para o GRANDpy é representada pela Figura 49 e o resultado fornecido é exibido pela Figura 50.

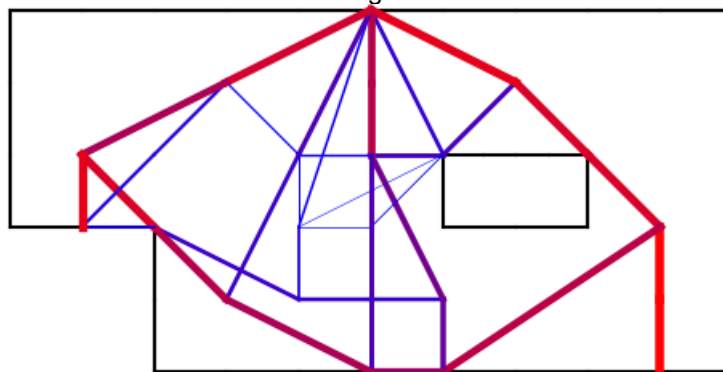
Figura 49 – Malha de base regular do Domínio Viga Parede com Orifício



Fonte: Próprio autor



Figura 50 – Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício no GRANDpy

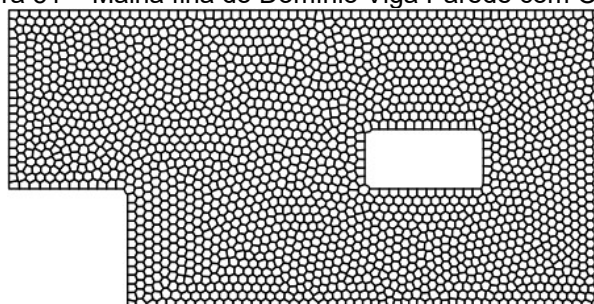


Fonte: Próprio autor

#### 6.4.2 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo PolyTopy

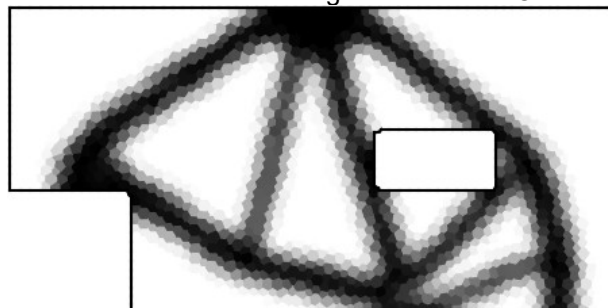
A malha usada é apresentada pela Figura 51. A restrição de volume foi de 30% do volume inicial e o resultado é exposto pela Figura 52.

Figura 51 – Malha fina do Domínio Viga Parede com Orifício



Fonte: Próprio autor

Figura 52 – Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício no PolyTop

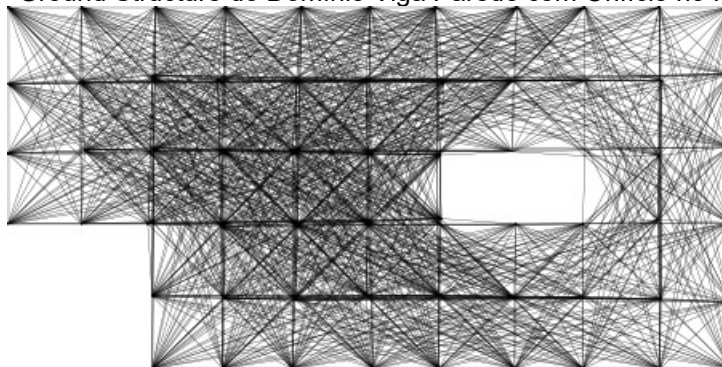


Fonte: Próprio autor

#### 6.4.3 Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício fornecido pelo HybridTopy

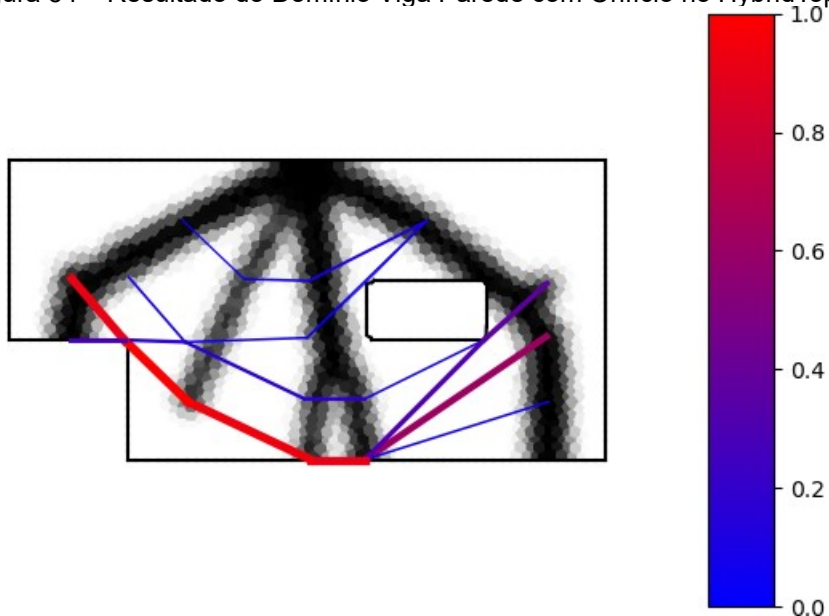
A malha contínua adotada foi a mesma que a do PolyTopy, Figura 51. A malha de base para a Ground Structure, Figura 53, foi a mesma malha utilizada no GRANDpy, Figura 49. A restrição de volume adotada foi 30% do volume inicial e o resultado é apresentado pela Figura 54.

Figura 53 – Ground Structure do Domínio Viga Parede com Orifício no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

Figura 54 – Resultado do Domínio Viga Parede com Orifício no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

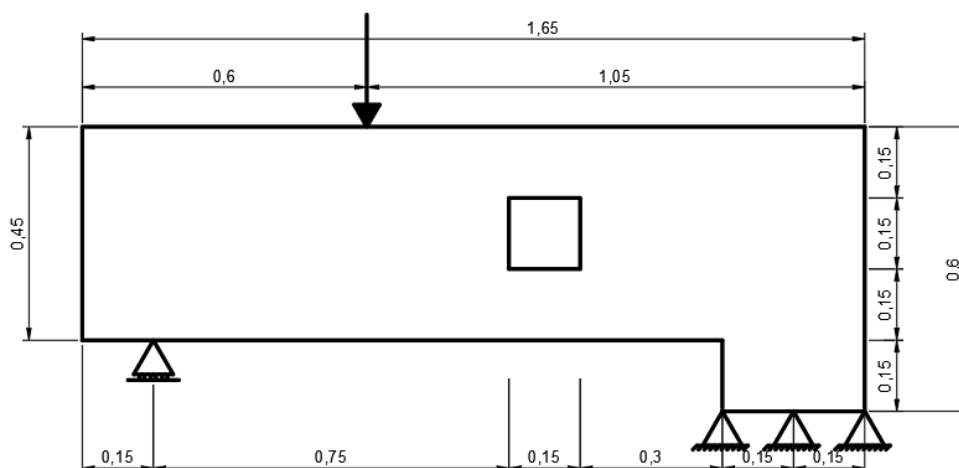
#### 6.4.4 Comparação de resultados do domínio Viga Parede com Orifício

Observa-se as similaridades entre os resultados obtidos. Os três exibiram bielas de compressão que se iniciam na aplicação da carga. Além disso, foi observado a presença de tirantes na zona inferior. Porém, o resultado do HybridTopy foi mais similar com o do GRANDpy, pois, em ambos, foi demonstrado a necessidade de tirantes na zona central superior.

### 6.5 Domínio Viga com Orifício

O domínio Viga com Orifício é representado pela Figura 55.

Figura 55 – Domínio Viga com Orifício

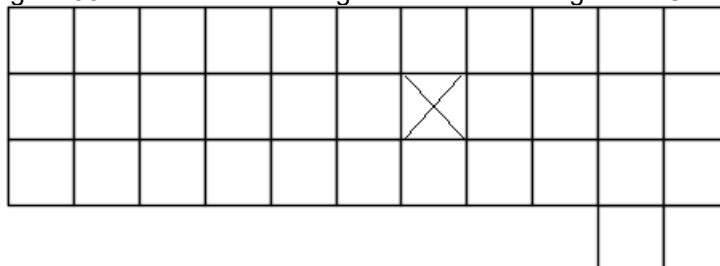


Fonte: Próprio autor

#### 6.5.1 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo GRANDpy

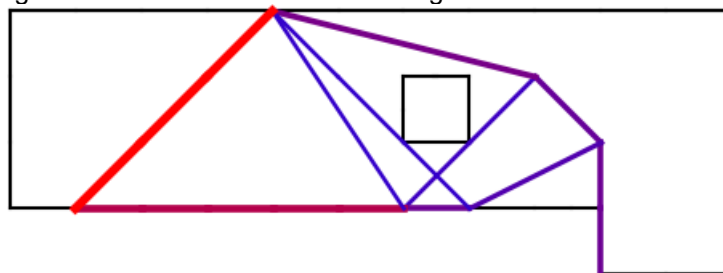
Para esse programa optou-se por utilizar a malha representada pela Figura 56 e o resultado fornecido pelo GRANDpy é exibido pela Figura 57.

Figura 56 – Malha de base regular do Domínio Viga com Orifício



Fonte: Próprio autor

Figura 57 – Resultado do Domínio Viga com Orifício no GRAND

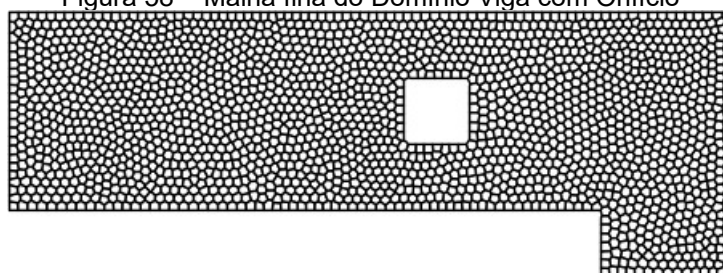


Fonte: Próprio autor

### 6.5.2 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo PolyTopy

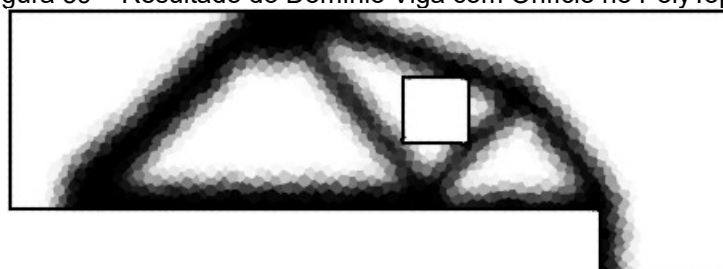
A malha utilizada no PolyTopy é apresentada pela Figura 58. A restrição de volume foi 30% do volume inicial e o resultado exposto pela Figura 59.

Figura 58 – Malha fina do Domínio Viga com Orifício



Fonte: Próprio autor

Figura 59 – Resultado do Domínio Viga com Orifício no PolyTopy



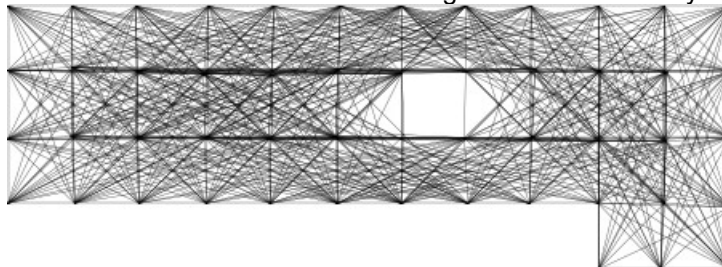
Fonte: Próprio autor

### 6.5.3 Resultado do Domínio Viga com Orifício fornecido pelo HybridTopy

A malha contínua adotada foi a mesma que a do PolyTopy, Figura 58, e a malha para a geração da Ground Structure, Figura 60, foi igual à adotada no

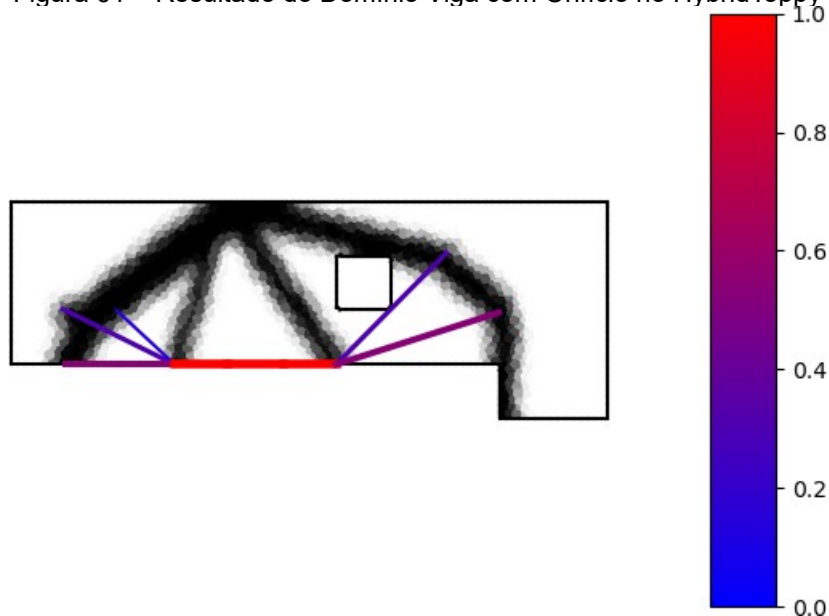
GRANDpy, Figura 56. A restrição de volume foi 30% do volume inicial e o resultado obtido é apresentado pela Figura 61.

Figura 60 – Ground Structure do Domínio Viga com Orifício no HybridToppy



Fonte: Próprio autor

Figura 61 – Resultado do Domínio Viga com Orifício no HybridToppy



Fonte: Próprio autor

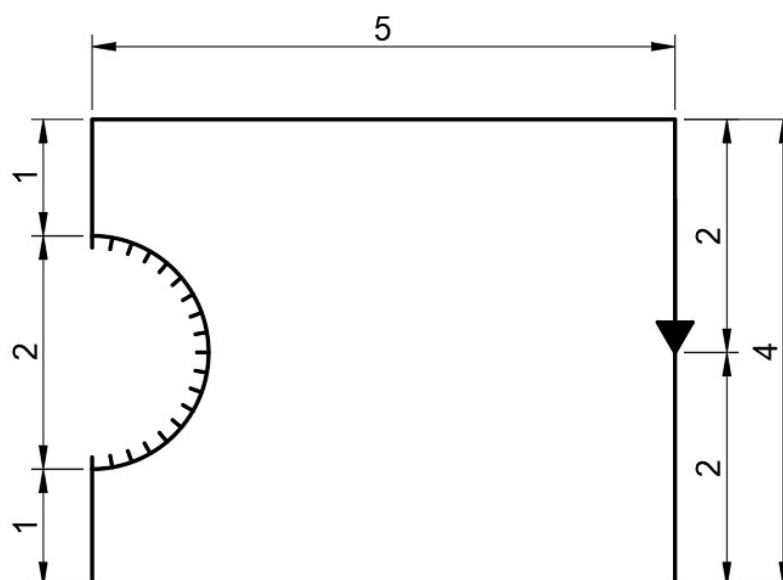
#### 6.5.4 Comparação de resultados do domínio Viga com Orifício

Os três resultados apresentaram soluções semelhantes e simples, sendo possível estimar o Modelo de Bielas e Tirantes sem a necessidade de um tratamento maior, mas observa-se que o resultado do HybridTop apresentou mais uma divisão de seção de barra na região central o que pode acarretar em uma economia de aço.

## 6.6 Domínio de Michell

O Domínio de Michell consiste de uma viga em balanço com apoio circular, a Figura 62 representa esta estrutura.

Figura 62 – Domínio de Michell

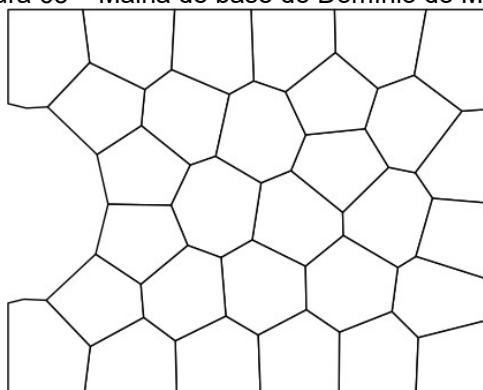


Fonte: Próprio autor

### 6.6.1 Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo GRANDpy

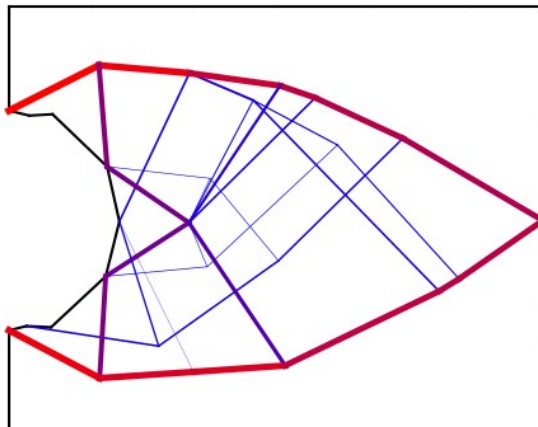
A malha base usada é representada pela Figura 63 e o resultado obtido é exposto pela Figura 64.

Figura 63 – Malha de base do Domínio de Michell



Fonte: Próprio autor

Figura 64 – Resultado do Domínio de Michell no GRANDpy

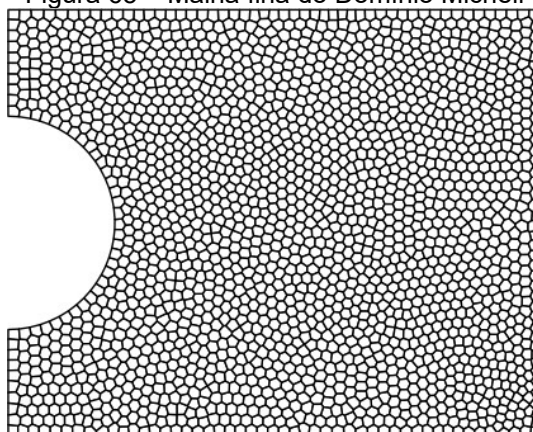


Fonte: Próprio autor

#### 6.6.2 Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo PolyTop

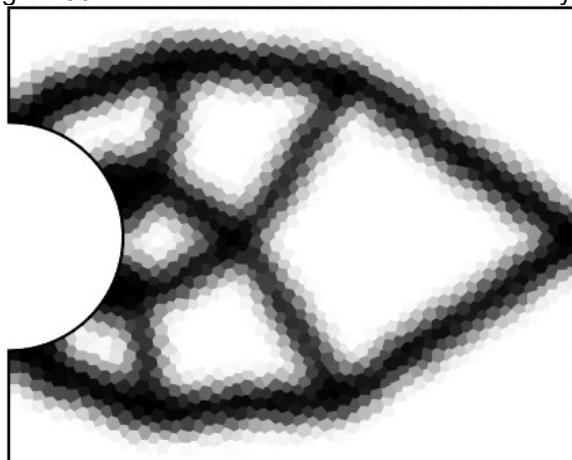
A malha utilizada é representada pela Figura 65. A restrição de volume foi 30% do volume inicial e o resultado obtido é apresentado pela Figura 66

Figura 65 – Malha fina do Domínio Michell



Fonte: Próprio autor

Figura 66 – Resultado do Domínio Michell no Polytop

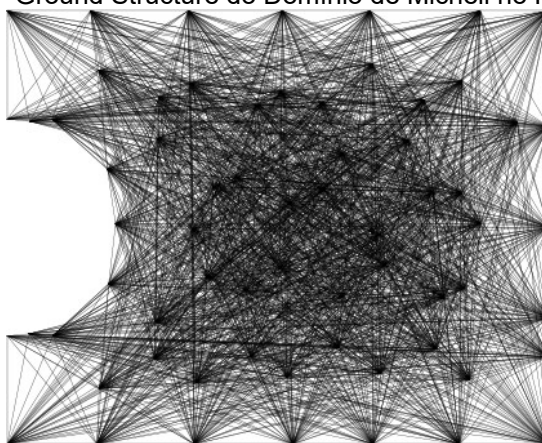


Fonte: Próprio autor

### 6.6.3 Resultado do Domínio de Michell fornecido pelo HybridTopy

A malha de elementos contínuos foi a utilizada no PolyTopy, Figura 65, a malha para a geração da Ground Structure, Figura 67, foi a usada no GRANDpy, Figura 63. A restrição de volume adotada foi de 30% do volume inicial e o resultado obtido é apresentado pela Figura 68.

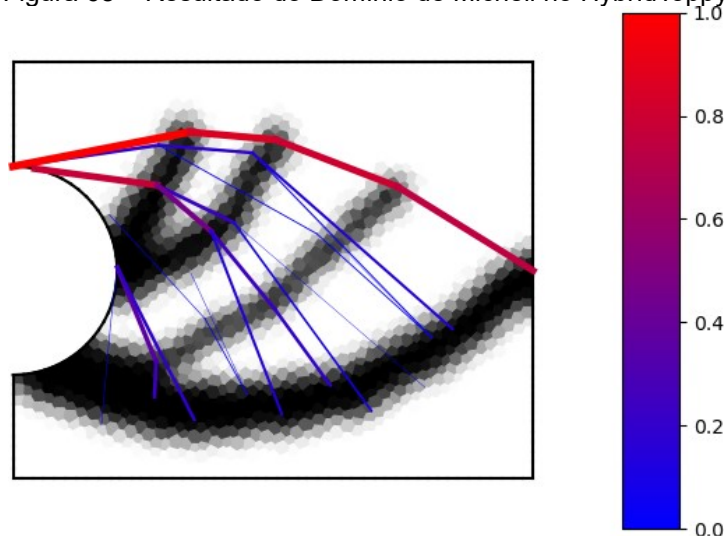
Figura 67 – Ground Structure do Domínio de Michell no HybridTopy



Fonte: Próprio autor



Figura 68 – Resultado do Domínio de Michell no HybridToppy



Fonte: Próprio autor

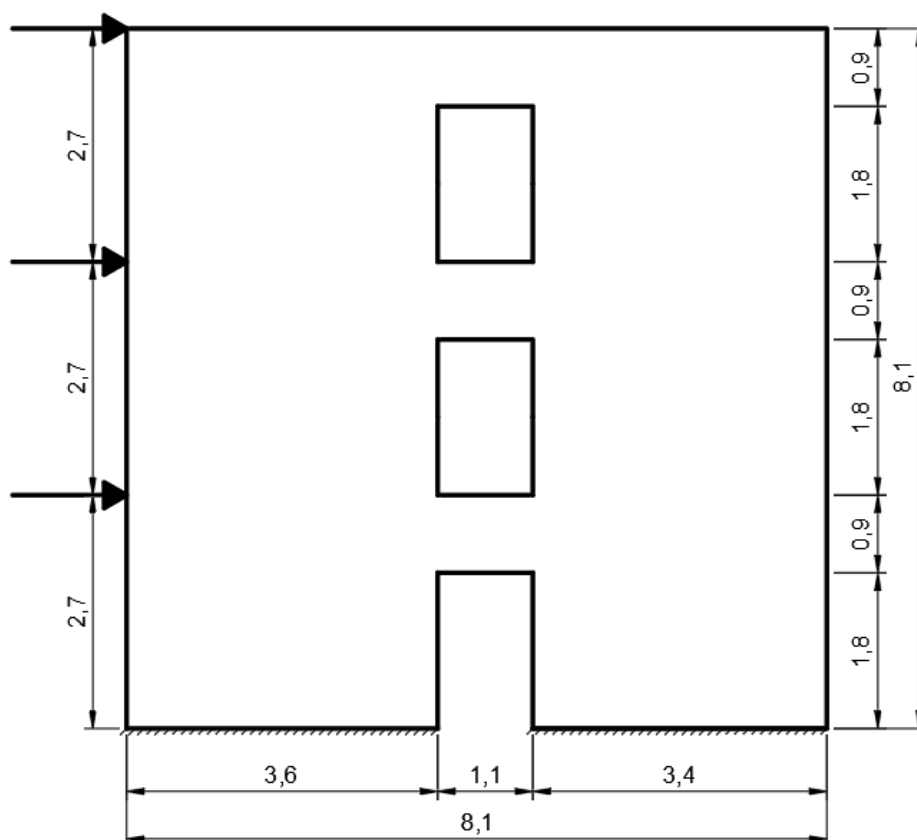
#### 6.6.4 Comparação de resultados do Domínio de Michell

Novamente os três resultados foram bastantes próximos. Além disso o domínio analisado se assemelha a uma viga em balanço e o resultado apresentou um comportamento semelhante a esse tipo viga. Nota-se porém que os resultados apresentados necessitam de um tratamento maior para a obtenção de um modelo de bielas e tirantes final; pois, apesar das condições de equilíbrio estarem sendo respeitadas, a treliça diretamente obtida será hipostática por falta de elementos.

### 6.7 Domínio Parede Cisalhada com Orifícios

O domínio Parede Cisalhada com Orifícios foi inspirado por um domínio exposto no relatório “*Practitioners guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*”, página 284, do grupo de trabalho 4.4 da Federação Internacional de Béton, (2008) e é representado pela Figura 69 a seguir.

Figura 69 – Domínio Parede Cisalhada com Orifícios

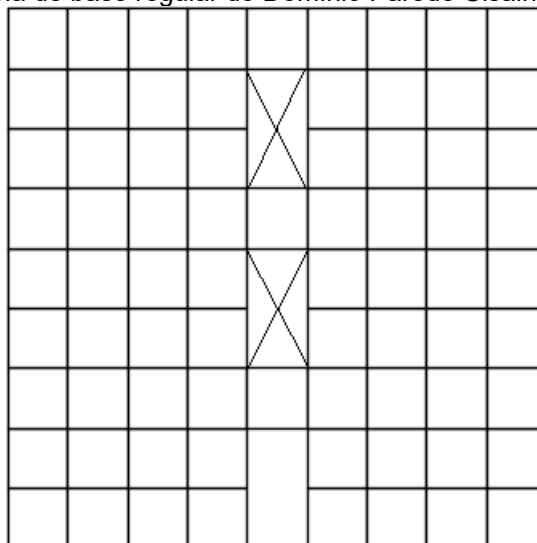


Fonte: Próprio autor

#### 6.7.1 Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo GRAND

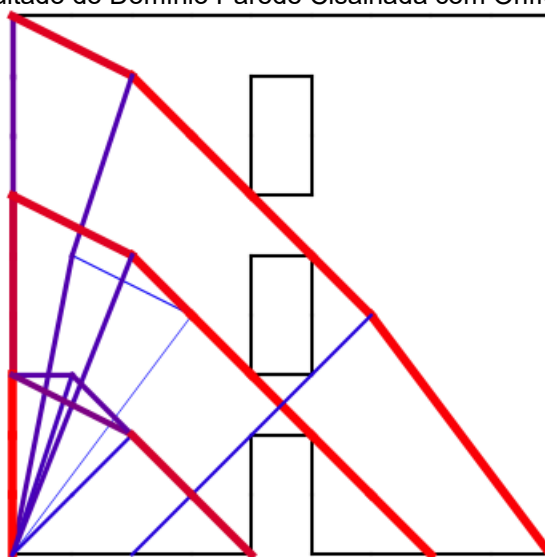
Para esse programa optou-se por utilizar a malha representada pela Figura 70. O resultado fornecido pelo GRANDpy é exibido pela Figura 71.

Figura 70 – Malha de base regular do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios



Fonte: Próprio autor

Figura 71 – Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios no GRANDpy

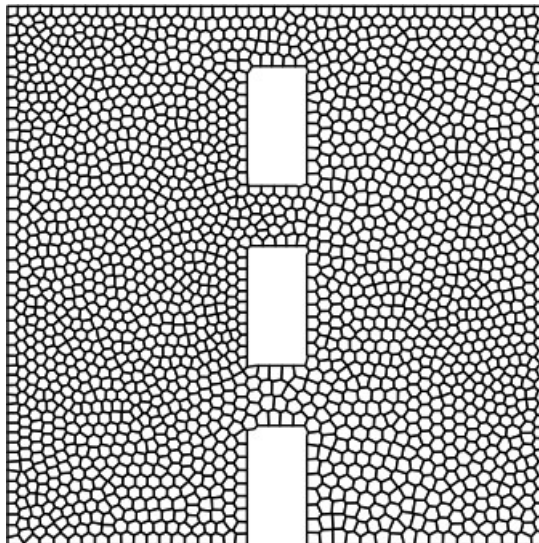


Fonte: Próprio autor

#### 6.7.2 Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo PolyTop

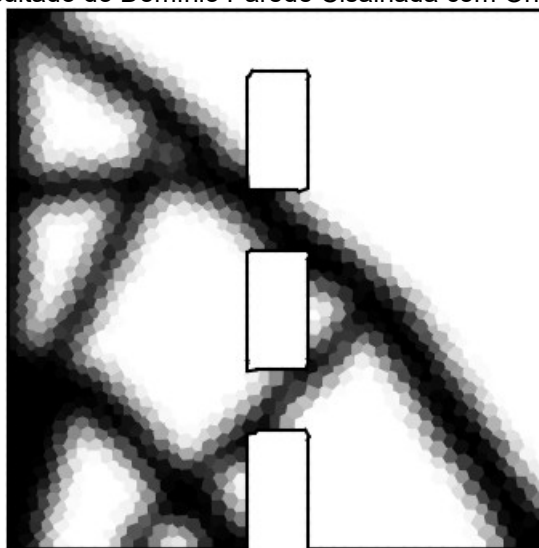
A malha utilizada no PolyTopy é apresentada pela Figura 72. A restrição de volume foi de 30% do volume inicial e o resultado é exposto pela Figura 73.

Figura 72 – Malha do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios no PolyTop



Fonte: Próprio autor

Figura 73 – Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios no PolyTop

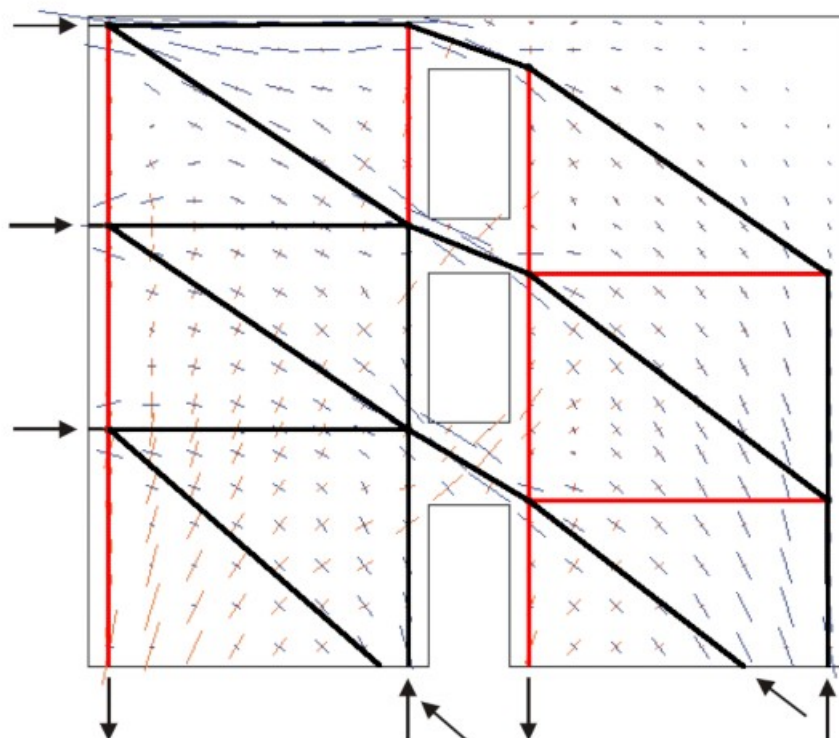


Fonte: Próprio autor

### 6.7.3 Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pela Federação Internacional de Béton, (2008)

Um domínio bastante próximo do analisado aqui foi avaliado pela Federação Internacional de Béton, (2008) utilizando a metodologia proposta por Schlaich; Schäfer; Jennewein (1987) sem processos de otimização. A Figura 74 apresenta o resultado Modelo de Bielas e Tirantes obtido pela federação. Nesse resultado as linhas vermelhas simbolizam os tirantes e as linhas pretas simbolizam as bielas.

Figura 74 – Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios pela Federação internacional de Béton, (2008)

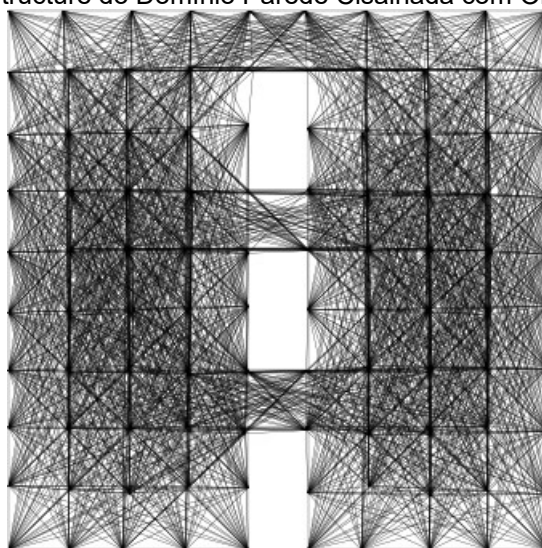


Fonte: Adaptado da Federação internacional de Béton, (2008)

#### 6.7.4 Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios fornecido pelo HybridToppy

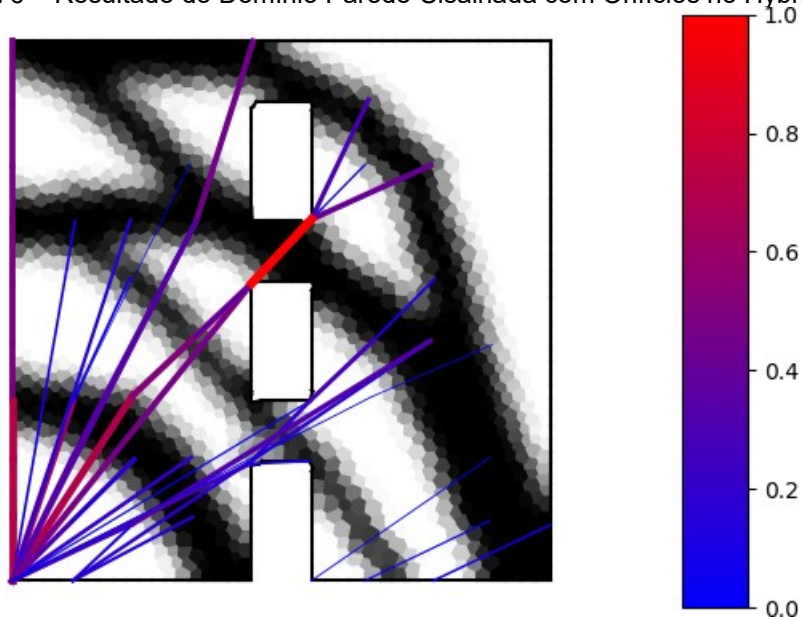
A malha contínua foi a utilizada no PolyToppy, Figura 72, a malha para a geração da Ground Structure, Figura 75, foi a usada no GRANDpy. A restrição de volume adotada foi de 30% do volume inicial e o resultado obtido é apresentado pela Figura 76.

Figura 75 – Ground Structure do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

Figura 76 – Resultado do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios no HybridTopy



Fonte: Próprio autor

#### 6.7.5 Comparação dos Resultados do Domínio Parede Cisalhada com Orifícios

Os resultados do GRANDpy, PolyTopy e HybridTopy apresentam certas similaridades, porém, diferentemente dos demais, o HybridTopy apresentou uma biela de compressão acima do último orifício. Ressalta-se que o modelo constitutivo

adotado pelo HybridTopy é mais próximo da realidade, pois considera a presença de dois materiais distintos (aço e concreto) e o concreto como material ortotrópico sendo provavelmente um resultado mais representativo. O resultado fornecido pela Federação internacional de Béton se diferencia das soluções aqui expostas por que foi elaborada sem processos de otimização, pois seguiu a metodologia original de Schlaich, Schäfer, Jennewein (1987) e como desvantagem não apresentará um modelo necessariamente com desempenho ótimo, mas como vantagem foi estabelecido de forma a facilitar bastante a execução, sendo uma solução mais simples do ponto de vista prático. Porém, espera-se um comportamento mecânico teórico melhor dos demais resultados aqui exibidos. Quanto a complexidade dos resultados, é possível notar que o fornecido pelo PolyTopy é o mais simples, portanto, o tratamento para a geração de um Modelo de Bielas e Tirantes será mais fácil; o resultado do GRANDpy possui uma complexidade intermediária e o do HybridTopy foi o que aparentemente apresentam uma maior complexidade dificultando a obtenção de um Modelo de Bielas e Tirantes final.

## **6.8 Dificuldades Encontradas**

Observou-se algumas dificuldades na elaboração do Algoritmo proposto. Como explicado na seção o PolyMesherpy não foi adequado para gerar as malhas esparsas em domínios com presença de muitos cantos e orifícios internos. O problema foi contornado utilizando malhas regulares. Talischi et al., (2012a) demonstram, em seu trabalho, que, no PolyMesher, é possível concentrar o refinamento da malha em certas regiões através de uma ponderação, propriedade extensível ao PolyMesherpy. Portanto, talvez seja possível utilizar uma malha esparsa no interior do domínio e refiná-la nas regiões necessárias para captura adequada da configuração do domínio.

Outra situação detectada é referente a resolução da não-linearização material. Para um número relativamente pequeno de elementos (em torno de 5000) houve convergência para todos os domínios aqui apresentados; porém, testes com quantidades maiores de elementos acarretou em uma falta de convergência. Essa falta de convergência pode ser devido a diversos motivos, como a ausência de um procedimento rebuscado para a estimativa inicial, problemas numéricos devido a

distribuição do volume inicial as barras, que para um número elevado de barras acarreta em seções transversais de aço bastante reduzidas, ou até mesmo uma deficiência do Método do Ponto Fixo aqui adotado.



## 7 CONCLUSÃO

O Método de Otimização Topológica Contínua, como apresenta uma natureza mais livre da estrutura, permite que o caminho das forças assuma qualquer forma e que os membros do Modelo de Bielas e Tirantes se conectem a qualquer ângulo; no entanto, essa maior liberdade pode gerar estruturas ótimas pouco práticas de se construir. O Método de Otimização Topológica Discreta, como possui uma natureza menos livre da estrutura, restringe os caminhos das forças a caminhos retos dependentes da malha pré-definida, desprezando potenciais caminhos mais eficientes; porém, possibilita obter estruturas ótimas com melhores condições para aplicação no mundo real. O Método de Otimização Topológica Híbrida se apresenta como uma alternativa aos métodos tradicionais permitindo uma liberdade maior para as bielas de concreto enquanto restringe os tirantes melhorando o aspecto construtivo do reforço de aço. Além disso, esse método usa uma formulação mais próxima da realidade, pois o material contínuo é aproximado como ortotrópico, fornecendo resultados que devem refletir um comportamento mecânico mais próximo da realidade. Porém essa formulação torna o método mais complexo – devido a inserção de uma não linearidade material –, acarretando um maior custo computacional, que, no entanto, foi substancialmente reduzido com a implementação de um procedimento, diminuindo a disparidade entre os tempos computacionais dos métodos para um número de elementos não elevado.

Apesar de alguns domínios terem apresentado resultados bastantes próximos para as metodologias avaliadas, o modelo de bielas e tirantes resultante pelo uso do método híbrido no Domínio Parede Cisalhada com Orifícios apresentou diferenças notáveis com relação as demais metodologias. Outros domínios como a Viga Parede com Orifício apresentou um resultado intermediário entre as outras duas metodologias. Vale ressaltar que como o modelo constitutivo do método híbrido é mais representativo, provavelmente o resultado fornecido por ele descreve melhor o comportamento mecânico real.

Apesar das vantagens citadas, o Método proposto apresenta alguns problemas. Um diferencial previsto no início desse trabalho era a implementação do método híbrido proposto por Gaynor; Guest; Moen, (2013) em um algoritmo que permitisse o uso de elementos poligonais; porém, observou-se um problema

referente a obtenção da malha esparsa através do PolyMesherpy, que, usando malhas pouco refinadas, apresentou dificuldades em descrever adequadamente domínios com presença de muitos cantos e orifícios. No entanto, ressalta-se que esse problema está contido na geração da malha esparsa, não afetando o desempenho do algoritmo nas etapas posteriores de otimização, e que o algoritmo de otimização funciona com o uso de elementos poligonais. Outro problema é decorrente do método simples implementado neste trabalho para a resolução da não linearidade material, que é adequado somente para um número não elevado de variáveis.

Não obstante os problemas citados, o Método de Otimização Topológica Híbrida apresentou um desempenho satisfatório. Observando os critérios de ductilidade, o método apresentado é bastante promissor no estudo do concreto armado permitindo eficiente e diretamente determinar tanto as regiões e direções ótimas de reforço de armadura como as regiões de compressão que mais influenciam na rigidez da estrutura e, portanto, possibilitando a obtenção de Modelos de Bielas e Tirantes precisos que provavelmente proporcionarão uma maior rigidez estrutural.

## **8 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS**

O Método de Otimização Topológica Híbrida apresentado, apesar de possuir uma eficiência adequada, pode ser aperfeiçoado ou drasticamente modificado.

Um dos problemas citados na seção 6.8 foi da resolução da não linearidade material, que demonstrou um desempenho insatisfatório a partir de certa quantidade de elementos havendo uma necessidade de aperfeiçoamento nessa etapa.

Além disso, apesar de ser eficiente em descrever o comportamento do concreto, o modelo ortotrópico de Darwin; Pecknold, (1977) adiciona complexidade ao problema. Porém, é possível desenvolver um método de otimização topológica híbrida implementando outra formulação, assim como Amir; Sigmund, (2013) desenvolveram, desde que mantenha-se a premissa de aproximar os elementos de reforço de aço como unidimensionais e os de concreto como bidimensionais ou tridimensionais.

Por fim, os resultados aqui apresentados são teóricos e somente sugestões para a elaboração de um Modelo de Bielas e Tirantes ótimo; no entanto, para a obtenção de um Modelo de Bielas e Tirantes final, necessita-se de uma análise mais aprofundada, fazendo devidas abstrações e considerando a praticidade do modelo. Portanto, trabalhos futuros podem avaliar se os resultados apresentados realmente geram modelos práticos, seguros e eficientes.

## 9 REFERÊNCIAS

- AMIR, O.; SIGMUND, O. **Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss topology optimization**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, [s.l.], v. 47, n° 2, p. 157–174, 2013. ISSN: 1615-147X, 1615-1488, DOI: 10.1007/s00158-012-0817-1.
- BRUGGI, M. **Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization**. *Computers & Structures*, [s.l.], v. 87, n° 23–24, p. 1483–1495, 2009. ISSN: 00457949, DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.06.003.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado Volume 1 Roberto Chust Carvalho.pdf**. 3 ed. São Carlos: EdUFSCar, 2007. 368 p. ISBN: 978-85-7600-086-0.
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to finite elements in engineering**. 4th ed ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011. 496 p. ISBN: 978-0-13-216274-6.
- CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. Dordrecht: Springer, 2009. 211 p. ISBN: 978-1-4020-8665-6.
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. **Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete**. *Journal of Structural Engineering*, [s.l.], p. 229–241, 1977.
- DASGUPTA, G. **Interpolants within Convex Polygons: Wachspress' Shape Functions**. *Journal of Aerospace Engineering*, [s.l.], v. 16, n° 1, p. 1–8, 2003. ISSN: 0893-1321, 1943-5525, DOI: 10.1061/(ASCE)0893-1321(2003)16:1(1).
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON TASK GROUP 4.4. **Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures**. [s.l.]: FIB - Fed. Int. du Béton, 2008.
- FREY, P. J.; GEORGE, P. L. **Mesh generation: application to finite elements**. Oxford: Hermes Science, 2000. 814 p. ISBN: 978-1-903398-00-5.
- FRITZSCHE, H. **Programação não-linear análise e métodos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1978. 170 p.
- GAYNOR, A. T.; GUEST, J. K.; MOEN, C. D. **Reinforced Concrete Force Visualization and Design Using Bilinear Truss-Continuum Topology Optimization**. *Journal of Structural Engineering*, [s.l.], v. 139, n° 4, p. 607–618, 2013. ISSN: 0733-9445, 1943-541X, DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000692.
- HUNTER, J. D. **Matplotlib: A 2D graphics environment**. *Computing in Science & Engineering*, [s.l.], v. 9, n° 3, p. 90–95, 2007. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
- KNOWLES, D. **Lagrangian Duality for Dummies**. [s.l.], p. 5, 2010.

KUMAR, P. **Optimal Force Transmission in Reinforced Concrete Deep Beams**. *Computers & Structures*, [s.l.], p. 7, 1977.

LAM, S. K.; PITROU, A.; SEIBERT, S. **Numba: A LLVM-Based Python JIT Compiler**. In: *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/2833157.2833162>>. ISBN: 978-1-4503-4005-2, DOI: 10.1145/2833157.2833162.

LEE, D.-K.; YANG, C.-J.; STAROSSEK, U. **Topology design of optimizing material arrangements of beam-to-column connection frames with maximal stiffness**. *Scientia Iranica*, [s.l.], v. 19, n° 4, p. 1025–1032, 2012. ISSN: 10263098, DOI: 10.1016/j.scient.2012.06.004.

LIANG, Q.; XIE, Y.; STEVEN, G. **Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure**. *ACI Structural Journal*, [s.l.], v. 97, n° 2, 2000. ISSN: 0889-3241, DOI: 10.14359/863.

LOGAN, D. **A First Course In The Finite Element Method**. 5 ed. [s.l.]: CENGAGE Learning, 2012. 1000 p.

OLIPHANT, T. E. **A guide to NumPy**. [s.l.]: Trelgol Publishing USA, 2006. v. 1.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. **Towards a Consistent Design of Structural Concrete**. *PCI journal*, [s.l.], 1987.

SUKUMAR, N.; TABARRAEI, A. **Conforming polygonal finite elements**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [s.l.], v. 61, n° 12, p. 2045–2066, 2004. ISSN: 0029-5981, 1097-0207, DOI: 10.1002/nme.1141.

TALISCHI, C. et al. **PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, [s.l.], v. 45, n° 3, p. 309–328, 2012a. ISSN: 1615-147X, 1615-1488, DOI: 10.1007/s00158-011-0706-z.

\_\_\_\_\_. **PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, [s.l.], v. 45, n° 3, p. 329–357, 2012b. ISSN: 1615-147X, 1615-1488, DOI: 10.1007/s00158-011-0696-x.

VIRTANEN, P. et al. **SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python**. *Nature Methods*, [s.l.], 2020. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>.

WACHSPRESS, E. L. **A rational finite element basis**. New York: Academic Press, 1975. 331 p. ISBN: 978-0-12-728950-2.

ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. **GRAND — Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, [s.l.], v. 50, n° 5, p. 861–882, 2014. ISSN: 1615-147X, 1615-1488, DOI: 10.1007/s00158-014-1085-z.

ZHONG, J. T. et al. **A new evaluation procedure for the strut-and-tie models of the disturbed regions of reinforced concrete structures.** *Engineering Structures*, [s.l.], v. 148, p. 660–672, 2017. ISSN: 01410296, DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.07.012.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PHILLIPS, D. V. **An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by ‘isoparametric’ co-ordinates.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [s.l.], v. 3, n° 4, p. 519–528, 1971. ISSN: 0029-5981, 1097-0207, DOI: 10.1002/nme.1620030407.